

307.801

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

II. ÉVFOLYAM, 1—2. FÜZET
1957

★

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ
ТОМ II., ВЫПУСК 1—2.
1957

★

PUBLICATIONS
OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
VOLUME II., FASC. 1—2.
1957



1958

TARTALOMJEGYZÉK

EGERVÁRY J.: A függőhidak általános elméletének megalapozása és felépítése mátrix-számítás segítségével	3
MEDGYESSY P.: Egy mechanikai függvény-szintétizátor	33
RÉNYI A.: Az $L(z)$ valószínűség-eloszlásfüggvényről	43
RÉVÉSZ P.: Valószínűségi változók sorozatának konvergenciájáról (Megjegyzés Prékopa A. egy problémájához)	51
SARKADI K.: A hipergeometrikus eloszlás általánosítása	59
TAKÁCS L.: Többdimenziós Poisson-folyamat által származtatott másodlagos folyamatokról	71
TAKÁCS L.: Bolyongási feladatokról	81
TAKÁCS L.: A felújítás-elmélet általánosításáról	91
BÉKÉSSY A.: A Laplace-módszer egy általánosítása	105
RÓZSA P.: Lineáris differenciál- és differenciaegyenletek általános kezdeti fel- tételeket kielégítő explicit megoldásáról	127
ADLER Gy.: Egy magfüggvényekkel kapcsolatos interpolációs feladat általá- nosítása	145

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

II. ÉVFOLYAM, 1—2. FÜZET
1957

★

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ II., ВЫПУСК 1—2.
1957

★

PUBLICATIONS
OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME II., FASC. 1—2.
1957



1958

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»
CÍMŰ KIADVÁNSOROZAT FOLYTATÁSA

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐ: LIPTÁK TAMÁS

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET
BUDAPEST, VI., NÉPKÖZTÁRSASÁG ÚTJA 31. I.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb, főként a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden évfolyama 4 füzetből áll és kb. 30 nyomdai ív terjedelmű. A dolgozatok vagy magyarul jelennek meg két világnyelven írott részletes kivonattal, vagy valamelyik világnyelven, magyar és még egy világnyelven írt kivonattal. A folyóirat előfizethető az Akadémiai Kiadónál (Budapest, V., Alkotmány u. 21.) vagy az Akadémiai Könyvesboltban (Budapest, V., Váci u. 22.). Az előfizetési díj egy évre 50,— Ft. Az egyes füzetek ára 15,— Ft. Kettős számok ára 30,— Ft. Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük a szerkesztőséghez fordulni.

A folyóirat „A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei” című kiadvánsorozat folytatása, melynek 3 kötete jelent meg [I. kötet (1952); II. kötet (1953); III. kötet (1954)].

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ПРОДОЛЖЕНИЕ ИЗДАНИЯ

«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»
(ТРУДЫ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ)

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

ТЕХНИЧЕСКИЙ РЕДАКТОР: TAMÁS LIPTÁK

АДРЕС РЕДАКЦИИ: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
BUDAPEST, VI., NÉPKÖZTÁRSASÁG ÚTJA 31. I.

В ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие статьи по преимуществу связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала выходит в 4 выпусках, в 30 печатных листах приблизительно. Статьи опубликованы или на венгерском языке с подробным резюме на двух мировых языках, или на каком-то мировом языке с резюме на венгерском и каком-то другом языке. Заказы принимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21.). Текущий счет № 45-790-057-50-032. По поводу отношения обмена просим обращаться непосредственно к редакции.

Журнал является продолжением издания «A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei» от которого вышли в свет 3 тома [Том I. (1952); Том II. (1953); Том III. (1954)].

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

CONTINUING THE SERIES

«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»
(PUBLICATIONS DE L'INSTITUT DES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DE L'ACADÉMIE)

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITOR: TAMÁS LIPTÁK

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE
BUDAPEST, VI., NÉPKÖZTÁRSASÁG ÚTJA 31.

THE PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of the scientific work of the Institute and other papers, especially on the practical applications of mathematics. The journal is published quarterly, 4 issues are forming one volume, consisting of about 30 printed lists. The papers appear either in Hungarian with abstracts two world-languages or in a world-language with abstracts in Hungarian and in an other world-language. For subscription please write to the trade organization „Kultúra” (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21.). Cheque No. 45-790-057-50-032. For establishing exchange relations please write to the editor.

The journal continues the series „A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei” of which 3 volumes were published [Vol. I. (1952); Vol. II. (1953); Vol. III. (1954)].

A FÜGGŐHIDAK ÁLTALÁNOS ELMÉLETÉNEK MEGALAPOZÁSA ÉS FELÉPÍTÉSE MÁTRIX-SZÁMÍTÁS SEGÍTSÉGÉVEL¹⁾

EGERVÁRY JENŐ

A függőhidak számítására vonatkozó néhány újabb munkában egy olyan törekvés ismerhető fel, hogy az infinitezimális műveleteket elkerüljék. Ennek során a differenciálhányadosokat differenciahányadosokkal, a folytonosan megoszló élő terhet koncentrált erőkkel helyettesítik (vö.: [2]).

E közlemény írója a lánchidak finit számítási módját már korábban kidolgozta az olyan „egyenletes” lánchidak számára, melyeknek merevítő tartója állandó inercianyomatékkal bír és melyeknek függesztő rúdjai ekvivalenstársak (lásd: [3]).

Az alábbiakban az általános (szakaszonként állandó inercianyomatékú és változó hosszúságú szakaszokból álló) lánchidak finit elméletét építjük ki. A rúdelmélet Clapeyron-féle egyenleteinek a következetes használata, valamint az esetleg folytonosan megoszló élő tehernek koncentrált erőkkel való helyettesítése során keletkező lineáris egyenletek megfelelő tárgyalásához mátrixelméleti segédeszközöket veszünk igénybe. Lánchidak alapegyenleteként olyan mátrixegyenlet adódik, melynek ismeretlene a merevítő tartó lehajlási mátrixa. Ennek a mátrixegyenletnek a megoldásához csupán kontinuáns mátrixok invertálása szükséges, amire egyszerű, gépi úton is könnyen végrehajtható számítási utasítást is tartalmaz a dolgozat. Egy $n - 1$ függesztő-rúddal bíró lánchíd esetén a horizontális feszültség növekedése számára n -edrendű egyenletet nyerünk.

A lánchíd mátrixegyenlete, egy olyan határátmenetnél, amikor a függesztőrudak száma minden határon túl növekszik, a függőhidak jól ismert Melan-féle differenciálegyenletébe megy át.

Az utolsó fejezetben megmutatjuk, hogy korábbi dolgozatunknak az egyenletes lánchidakra vonatkozó formulái a jelen dolgozatban közölt eredményeknek speciális esetei.

Valamely merev vagy rugalmas testekből álló rendszer mechanikai vizsgálatához szükséges matematikai segédeszközök jellege tudvalevőleg a rendszer szabadsági fokainak a számától függ. A technikai szilárdságtannak azok a problémái, melyek alapjául a Hooke-törvény szolgál, véges sok szabadsági fok esetén lineáris algebrai egyenletekre, végtelen sok szabadsági fokkal bíró rendszerek esetén azonban lineáris differenciálegyenletekre vezetnek.

¹⁾ E dolgozat tartalmilag egyezik a szerzőnek német nyelvű [1] dolgozatával.

Történeti tény, hogy a lineáris differenciálegyenletek megoldási elmélete — a Green-függvény, illetve a sajátfüggvények felhasználásával — korábban fejlődött ki, mint a lineáris algebrai egyenletrendszereknek a mátrixelméletet felhasználó, analóg megoldási elmélete. Nyilván elsősorban ennek a körülménynek tudható be, hogy a függőhidak elméletében eddig majdnem kizárólag végtelen sok szabadsági fokkal bíró modelleket vettek alapul, melyek lineáris differenciálegyenletre vezetnek, ugyanakkor véges szabadsági fokkal bíró modellek alkalmazására, melyek lineáris algebrai egyenletrendszerre vezetnek, alig történt kísérlet.

Egy függőhíd alkalmas matematikai modelljének a megválasztásánál élesen meg kell különböztetnünk a kábelhidakat és a lánchidakat.

Egy kábelhíd — melynél egy rugalmas gerenda (merevítő tartó) és egy egydimenziós, hajlékony kontinuum (kábel) véges számú merev függesztőrúddal van összekapcsolva —, nagyobb számú függesztő rúd esetén olyan egyszerűbb modellel helyettesíthető, melynél a kábel és a gerenda függesztő membránnal vannak összekapcsolva, ez a modell pedig közvetlenül a jól ismert, először E. MELAN által felállított lineáris differenciálegyenletre vezet.

Egy lánchíd azonban, melynek láncrúdjai és függesztőrúdjai merev (vagy legfeljebb hosszirányban nyúlékony) rudaknak tekinthetők, sokkal pontosabban és előnyösebben helyettesíthető egy véges sok szabadsági fokú modellel, ha az élő (hasznos) terhelést — melynek matematikailag pontos eloszlása sem nem ismeretes, sem gyakorlatilag nem lényeges —, sztatikailag ekvivalens és a függesztőrudak alsó végpontjain támadó koncentrált erőkkel helyettesítjük. A lánchídnek ez a „finitizált” modellje — a technikai szilárdságban legegyszerűbb tételeinek alkalmazásával — lineáris algebrai egyenletrendszerre vezet, melynél az ismeretlenek száma a függesztőrudak számával egyenlő.

Jelen dolgozatunkban a fenti módon finitizált lánchídmodell egyensúlyi egyenletrendszerét mátrixelméleti segédeszközökkel felállítjuk és megoldjuk. Ezzel egyidejűleg azt az — egyes szerzők eredményei alapján sejthető — tényt is kellő megvilágításba helyezzük, hogy a lineáris differenciálegyenletek elméletéből ismert Green-függvénynek (hatásfüggvénynek), illetve a Green-függvény bilineáris sorfejtésének finit analogonokként a fenti egyenletrendszer koefficiensmátrixának inverze, illetve annak spektrálfelbontása felelnek meg.

Avégből, hogy a látszólag lényegesen különböző módszerek és megoldási formulák közti összefüggést és analógiát minél világosabban kifejezésre juttassuk, párhuzamosan fogjuk tárgyalni az egyetlen függesztőrúddal bíró és az $n - 1$ függesztőrúddal bíró lánchíd, valamint a végtelen sok függesztőrúddal (függesztő membránnal) bíró függőhíd alapegyenleteit. Eközben ki fog derülni, hogy noha az egyetlen függesztőrúddal bíró lánchíd tárgyalása egy egyszerű technikai-szilárdságtani gyakorló feladattal egyenértékű, mindazonáltal az abból származó egyszerű megoldási formulák $n - 1$ függesztőrúddal bíró lánchíd esetére is megtartják érvényességüket, ha az azokban szereplő skalárokat megfelelő mátrixokkal helyettesítjük.

Ezen túlmenően kimutatjuk továbbá, hogy az n tagú lánchíd számára levezetett mátrixelméleti megoldási formulák, $n \rightarrow \infty$ határátmenet esetén a TIMOSHENKO, KÁRMÁN, BLEICH stb. által kábelhidak számára megadott megoldási formulákba mennek át.

Eddig általában függőhidak alapegyenletéről beszéltünk. Tudvalevőleg azonban minden rugalmasságtani problémához kétféle alapegyenlet tartozik; nevezetesen feszültségi egyenlet és alakváltozási egyenlet.

Valamely függőhíd feszültségi egyenlete (melyben a merevítő tartó hajlítófeszültségi mátrixa illetve hajlítófeszültségfüggvénye szerepel mint ismeretlen) különösen egyszerű alakú. Véges sok függesztőrúd esetén a feszültségi egyenlet együtthatómátrixa szimmetrikus kontinuáns, mely tudvalevőleg aránylag könnyen invertálható. Végtelen sok függesztőrúd (függesztőmembránnal bíró kábelhíd) esetén a feszültségi egyenlet egy másodrendű lineáris differenciálegyenlet, melynek Green-függvénye (hatásfüggvénye) konstans keresztmetszet-inercianyomaték esetén explicit megadható, változó keresztmetszet-inercianyomaték esetén végtelen sorral állítható elő.

Valamely függőhíd alakváltozási egyenlete (melyben a merevítőtartó lehajlási mátrixa, illetve lehajlási függvénye szerepel, mint ismeretlen) lényegesen bonyolultabb mátrix-, illetve differenciálegyenlet. Egy mátrixidentitás, illetve annak már D. HILBERT által felhasznált infinitizemális analogonja segítségével azonban lehetővé fog válni, hogy az alakváltozási egyenlet megoldását a feszültségi egyenletére visszavezessük. Ily módon a KÁRMÁN, BLEICH stb. által talált sorfejtések is beilleszthetők az általános elmélet keretébe.

Ha a lánchíd egyenletes (azaz függesztőrúdjai ekvidisztánsak és merevítőtartója konstans inercianyomatékú), akkor gyakorlati számítás céljából legalkalmasabbnak látszik az együtthatómátrix jól ismert sajátértékeinek és sajátmátrixainak a felhasználása, minthogy ily módon automatikusan nyerjük a keresett feszültségi mátrix, illetve lehajlási mátrix Fourier-kifejtését.

Általános (nem egyenletes) lánchídnál azonban a sajátértékek és sajátmátrixok nem ismeretesek. Ennélfogva ez idő szerint az általános lánchidak számítását legcélszerűbb az alapegyenletekben szereplő kontinuáns mátrixok direkt invertálásával elvégezni.

Amidőn a jelen munkában a függőhidak számításával kapcsolatban annyira különböző megoldási módszereket állítunk szembe egymással, mint a mátrixmódszer és az infinitizemális módszer, akkor indokolttnak látszik azoknak gyakorlati alkalmasság szempontjából való összehasonlítása. Nyilván nem foroghat fenn kétség abban a tekintetben, hogy kevés függesztőrúddal bíró lánchíd esetén a mátrixmódszer a hídban fellépő feszültségeket és alakváltozásokat sokkal pontosabban fogja megadni, mint az infinitizemális módszer.

Nagy — 30 vagy több függesztőrúddal bíró — lánchidaknál a fenti két módszerrel nyert eredmények közti különbség előreláthatólag oly csekély lesz, hogy azt az anyagi állandók bizonytalansága mellett el lehet hanyagolni. Ha azonban figyelembe vesszük, hogy a differenciálegyenletek megoldó formulái mindig gyakorlatilag kényelmetlen limeszprocesszusokat (Green-függvény használatánál paraméteres integrált, sajátfüggvények használatánál végtelen sorokat) tartalmaznak, akkor arra a megállapításra kell jutnunk, hogy a finit mátrixmódszer alkalmazása ez esetben is előnyösebb.

Minden rendszernél, mely egy vertikális erők által igénybe vett kábelt vagy láncot tartalmaz, tehát függőhídnál is — egy differenciál- vagy mátrix-egyenlet megoldásán kívül — még a kábel-, illetve láncfeszültségnek az igénybevétel által előidézett változását, vagyis a horizontális feszültség növekedését is ki kell számítani. Ez a számítás általában úgy történik, hogy a keresett feszültségnövekedés számára kinematikai és rugalmasságtani meggondolásokkal meghatározó egyenletet állítunk fel, és ennek legnagyobb gyöke szolgálja a keresett feszültségnövekedést.

A feszültségnövekedés kiszámítása finitizált lánchíd esetében sem lineáris feladat. Egyetlen függesztőrúddal bíró lánchídnál is másodfokú algebrai egyenletet kell megoldani. $n - 1$ függesztőrúdat tartalmazó lánchídnál n -edfokú algebrai egyenlet, kábelhídnál pedig transzcendens egyenlet adódik. Ezen egyenletek közelítő megoldására különböző módszereket javasoltak.

Egyenletes lánchíd esetében a feszültségnövekedés meghatározására szolgáló egyenlet olyan alakra hozható, melyből egyetlen pozitív gyök létezése felismerhető és az közelítőleg könnyen kiszámítható.

Általános lánchíd esetén a meghatározó egyenlet közelítő megoldása nehézkes feladat. Ilyen esetben célszerűbb egy inverz eljárás, melynél a feszültségnövekedést a gyakorlatnak jól megfelelő közelítő értékkel előírjuk és ezután olyan híderheléseket veszünk fel, melyek a meghatározó egyenletet kielégítik.

Hogy a jelen munkát lehetőleg könnyen olvashatóvá tegyük, azt a következőképpen osztottuk fejezetekre.

1° Az első fejezetben röviden ismertetjük a lineáris differenciálegyenletek és a kontinuanásmátrixok közti összefüggést.

2° A második fejezetben idézzük és mátrixalakban kifejezzük a vertikális erők által igénybe vett láncc, illetve gerenda jólismert egyensúlyi egyenleteit.

3° A harmadik fejezet egy kéttagú, egyetlen függesztőrúddal bíró lánchíd hajlítófeszültségének és lehajlásának elemi úton történő kiszámítását tartalmazza. Egyidejűleg adódik a másodfokú egyenlet is, mely a horizontális feszültség növekedését meghatározza.

4° A negyedik fejezetben megmutatjuk, hogy az előzőleg a kéttagú lánchíd számára levezetett elemi megoldási formulák n -tagú lánchíd esetére is érvényesek maradnak, ha a skaláris mennyiségeket megfelelő mátrixokkal helyettesítjük. Levezetjük továbbá a lánchíd terhelése és az ennek következtében beálló horizontális feszültségnövekedés közti összefüggést.

5° Az ötödik fejezetben elvégezzük a határátmenetet, melynél a függesztőrúdak száma minden határon túl növekszik és így módon megkapjuk a kábelhidak differenciálegyenletét.

6° A hatodik fejezetben azokkal az egyszerűsödésekkel és gyakorlati előnyökkel foglalkozunk, melyek egyenletes lánchíd, illetve kábelhíd esetén bekövetkeznek.

1. fejezet

1. §. Ebben a fejezetben rá kívánunk mutatni azokra az analógiákra, melyek egyrészt a lánchidak finit elméletében szereplő kontinuanásmátrixok, másrészt a kábelhidak infinitizemális elméletében szereplő másodrendű differenciálegyenletek közt fennállnak.

Hogy a kontinuanások és a másodrendű lineáris differenciálegyenletek közti összefüggést megvilágíthassuk, néhány fogalmat kell előrebecsátani.

Ha adva van az oszlop- (vagy sor-) mátrixoknak egy végtelen sorozata :

$$f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}, \dots$$

ahol a felső index a mátrixok rendszámát jelenti, akkor ezen mátrixok mindegyikét ábrázolhatjuk oly módon, hogy választva egy tetszőleges $L > 0$ számot, az $L/n, 2L/n, \dots, (n-1)L/n$ abszcisszáknak ordinátaként az $f^{(n)}$ mátrix $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \dots, f_{n-1}^{(n)}$ elemeit feleltetjük meg. Előfordulhat, hogy az így nyert pontsorportok minden határon túl növekvő n esetén egy folytonos görbévé

sűrűsödnek. Ez esetben azt fogjuk mondani, hogy a mátrix-sorozatnak a limese egy folytonos, egyváltozós függvény. Pontosabban :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)} = f(x) ,$$

ha $(0, L)$ intervallumban minden x -re

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ kL/n \rightarrow x}} f_k^{(n)} = f(x) .$$

Ugyanilyen módon a négyzetes mátrixoknak valamely $\mathbf{G}^{(n)}$ végtelen sorozata konvergálhat egy, a $0 < x, y < L$ négyzetben definiált $G(x, y)$ folytonos, kétváltozós függvényhez.

Mátrix-szorzatoknak a sorozata megfelelő határátmenet esetén egy határozott integrálhoz konvergál. Valóban :

$$(1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{n} \mathbf{g}^{(n)*} \mathbf{f}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n g_k^{(n)} f_k^{(n)} \frac{L}{n} = \int_0^L g(x) f(x) dx$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{n} \mathbf{G}^{(n)} \mathbf{f}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n G_{hk}^{(n)} f_k^{(n)} \frac{L}{n} = \int_0^L G(x, \xi) f(\xi) d\xi .$$

Fentiekből látható, hogy egy mátrix-szorzatokból álló sorozat limese nem a két limeszfüggvény szorzata, hanem azoknak szorzatintegrálja.

A mátrix-számítás univerzálítása abban is megnyilvánul, hogy nemcsak az integrál, hanem a derivált függvény is előállítható, mint egy mátrix-szorzat-sorozat limese. Ha ugyanis az $\mathbf{f}^{(n)}$ oszlopmátrixot, melynek elemei valamely, a 0 és L helyeken eltűnő, differenciálható $f(x)$ függvénynek $f(L/n)$, ..., $f((n-1)L/n)$ értékei, megszorozzuk a $-n^2/L^2 \mathbf{C}_0^{(n)}$ kontinuánssal, akkor

$$-\frac{n^2}{L^2} \mathbf{C}_0^{(n)} \mathbf{f}^{(n)} = -\frac{n^2}{L^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f\left(\frac{L}{n}\right) \\ f\left(\frac{2L}{n}\right) \\ . \\ . \\ . \\ f\left(\frac{(n-1)L}{n}\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{L}{n}\right)^2} \begin{bmatrix} f\left(\frac{0}{n}\right) - 2f\left(\frac{L}{n}\right) + f\left(\frac{2L}{n}\right) \\ f\left(\frac{L}{n}\right) - 2f\left(\frac{2L}{n}\right) + f\left(\frac{3L}{n}\right) \\ . \\ . \\ . \end{bmatrix}$$

adódik, a szorzatmátrix elemei tehát az $f(x)$ függvénynek a második különbségi hányadosai. Ha már most $f(x)$ kétszer folytonosan differenciálható, akkor a fenti értelemben a következő limeszreláció adódik:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{L^2} \mathbf{C}_0^{(n)} f^{(n)} = - \frac{d^2 f(x)}{dx^2}.$$

2. §. Ezen előkészületek után a reciprokok mátrix és a Green-függvény közti fent említett analógia könnyen illusztrálható.

Tekintsük a következő egyenletrendszer:

$$(1.2) \quad \frac{n}{L} \mathbf{C}_0 \mathbf{y} = \mathbf{q} \frac{L}{n}.$$

vagy részletesebben kiírva

$$\frac{-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}}{\frac{L}{n}} = q_i \frac{L}{n} \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n-1 \\ y_0 = y_n = 0 \end{array} \right).$$

Ennek a megoldása:

$$(1.3) \quad \mathbf{y} = \frac{L}{n} \mathbf{C}_0^{-1} \mathbf{q} \frac{L}{n},$$

vagy a \mathbf{C}_0^{-1} inverznek ismert alakját felhasználva

$$y_i = \sum_{j=1}^n g_{ij} q_j \frac{L}{n}, \quad \text{ahol} \quad g_{ij} = \begin{cases} \frac{L}{n} \frac{i(n-j)}{n} & \text{ha } i \leq j \\ \frac{L}{n} \frac{j(n-i)}{n} & \text{ha } i \geq j. \end{cases}$$

Ez az egyenlet (lásd: 2. fejezet, 2. §.) meghatározza egy $x = 0$ és $x = L$ közt kifeszített húr egyensúlyi alakját, midőn annak $x = L/n, 2L/n, \dots, (n-1)L/n$ pontjai a $q_1 L/n, q_2 L/n, \dots, q_{n-1} L/n$ transzverzális erőkkel vannak terhelve.

Ha most az (1.2) egyenletben, melyet az $n^2/L^2 \mathbf{C}_0 \mathbf{y} = \mathbf{q}$ alakban is írhatunk, az $n \rightarrow \infty$ határátmenetet végrehajtjuk, akkor a

$$(1.4) \quad - \frac{d^2 y}{dx^2} = q(x)$$

összefüggést, vagyis egy olyan húrnak a differenciálegyenletét nyerjük, melyre a $q(x)$ megoszló terhelés hat. Ugyanennél a határátmenetnél azonban az $L/n \mathbf{C}_0^{-1}$ inverz átmegy a

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \frac{iL}{n} \rightarrow x \\ \frac{jL}{n} \rightarrow \xi}} \begin{cases} \frac{\frac{iL}{n} \left(L - \frac{jL}{n} \right)}{L} = \frac{x(L-\xi)}{L} & \text{ha } x \leq \xi \\ \frac{\frac{jL}{n} \left(L - \frac{iL}{n} \right)}{L} = \frac{\xi(L-x)}{L} & \text{ha } x \geq \xi \end{cases}$$

formulákba, azaz éppen az (1.4) differenciálegyenlet jól ismert Green-függvényébe (kifeszített húr hatásfüggvénye). Egyidejűleg (1.3) átmegy (1.1) figyelembevételével az

$$y(x) = \int_0^L G(x, \xi) q(\xi) d\xi; \quad y(0) = y(L) = 0$$

megoldási formulába.

3. §. A kábelhidak szokásos elméletében másod- és negyedrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek lépnek fel, melyek változó inercianyomatékú merevítőtartó esetén változó együtthatókkal bírnak. Egyik megoldási módszer fő segédeszköze a

$$(1.5) \quad -\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda \varrho(x) = q(x)$$

differenciálegyenlethez és az

$$(1.6) \quad y(0) = y(L) = 0$$

kerületi feltételekhez tartozó $G(x, \xi; \lambda)$ Green-függvény. $\varrho(x)$ egy állandó faktortól eltekintve az x helyen mutatkozó inercianyomaték reciprokát jelenti, és L hosszúságú szimmetrikus híd esetén kielégíti a $\varrho(x) = \varrho(L - x)$ relációt. Ebben az esetben a $G(x, \xi; \lambda)$ Green-függvény a megfelelő

$$(1.7) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - \lambda \varrho(x) y = 0$$

homogén egyenlet egyetlen partikuláris megoldása segítségével következőképpen szerkeszthető meg.

Legyen $u(x; \lambda)$ az (1.7) differenciálegyenletnek az $u(0; \lambda) = 0$, $u'_x(0; \lambda) = 1$ kezdeti feltételek által egyértelműen meghatározott megoldása és tegyük fel, hogy $u(L; \lambda) \neq 0$. Ekkor a keresett Green-függvény

$$G(x, \xi; \lambda) = \begin{cases} \frac{u(x; \lambda) u(L - \xi; \lambda)}{u(L; \lambda)} & \text{ha } x \leq \xi \\ \frac{u(\xi; \lambda) u(L - x; \lambda)}{u(L; \lambda)} & \text{ha } x \geq \xi \end{cases}$$

és az (1.5) inhomogén egyenletnek az (1.6) kerületi feltételeket kielégítő megoldása

$$y(x) = \int_0^L G(x, \xi; \lambda) q(\xi) d\xi.$$

4. §. Jelen munkában kiépítjük a lánchidaknak egy elméletét, melyben kétszeresen szimmetrikus kontinuánssal bíró lineáris egyenletrendszerek kitüntetett szerepet játszanak. Ezek az egyenletek — mátrix-szimbólumokkal írva — a következő alakot veszik fel:

$$\mathbf{C}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b_1 & a_2 & -b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & -b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{bmatrix} = \mathbf{q}.$$

Itt a híd szimmetriája miatt $a_k = a_{n-k}$, $b_k = b_{n-k-1}$. Az $\mathbf{y} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{q}$ megoldás előállításához szükséges \mathbf{C}^{-1} inverz mátrix numerikus kiszámítására e helyen egy gyakorlatilag jól használható számítási utasítást adunk meg, mely kihasználja a reciproknak és a Green-függvény közti fentebb illusztrált analógiát.

Számítsuk ki az

$$\begin{aligned} a_1 u_1 - b_1 u_2 &= 0 \\ -b_1 u_1 + a_2 u_2 - b_2 u_3 &= 0 \\ \vdots & \\ -b_{n-3} u_{n-3} + a_{n-2} u_{n-2} - b_{n-2} u_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszernek az $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ kezdeti feltételek által egyértelműen meghatározott megoldását, felhasználva az alábbi rekurziós formulát:

$$(1.8) \quad u_{k+1} = \frac{a_k u_k - b_{k-1} u_{k-1}}{b_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Tegyük fel továbbá, hogy

$$u_n = a_{n-1} u_{n-1} - b_{n-2} u_{n-2} \neq 0.$$

Ekkor a \mathbf{C}^{-1} inverz mátrixnak g_{ij} elemeit a

$$(1.9) \quad g_{ij} = \begin{cases} \frac{u_i u_{n-j}}{u_n} & \text{ha } i \leq j \\ \frac{u_j u_{n-i}}{u_n} & \text{ha } i \geq j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n-1)$$

formulák adják és az adott inhomogén egyenletrendszer megoldása:

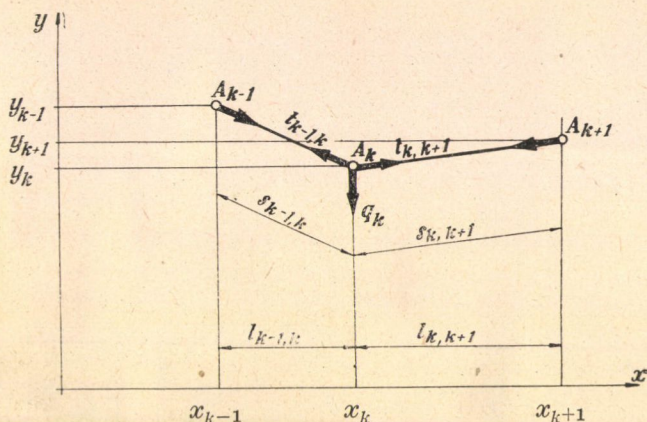
$$(1.10) \quad y_i = \sum_{j=1}^{n-1} g_{ij} q_j \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Az infinitezimális és a finit módszer kritikai összehasonlításánál figyelembe kell vennünk, hogy az (1.7) homogén differenciálegyenlet $u(x; \lambda)$ megoldásának a tényleges előállítására variábilis $\varrho(x)$ esetén mindig végtelen processzusokat, pl. λ szerinti sorbafejtést igényel. Ezzel szemben a megfelelő homogén algebrai egyenletrendszernek a megoldásához csupán véges számú alaplóművelet elvégzése szükséges.

2. fejezet

Függőleges erővel terhelt lánc egyensúlya

1. §. Ha egy (függőleges síkban levő) n -tagú A_0, A_1, \dots, A_n lánc (1. ábra), melynek k -adik csuklója, $A_k, (x_k, y_k)$ koordinátákkal rendelkezik, és arra q_k függőleges erő hat, ezen erők hatása alatt egyensúlyban van, akkor a



1. ábra

$t_{k-1,k}$ feszültségek, a koordináták és az erők között az alábbi összefüggéseknek kell fennállaniuk:

$$(2.1) \quad t_{k-1,k} \frac{x_{k-1} - x_k}{s_{k-1,k}} + t_{k,k+1} \frac{x_{k+1} - x_k}{s_{k,k+1}} = 0$$

$$(2.2) \quad t_{k-1,k} \frac{y_{k-1} - y_k}{s_{k-1,k}} + t_{k,k+1} \frac{y_{k+1} - y_k}{s_{k,k+1}} + q_k = 0.$$

A (2.1) egyenletekből következik, hogy a $t_{k,k+1}$ húzófeszültségnek a $t_{k,k+1} (x_{k+1} - x_k)/s_{k,k+1}$ vízszintes komponense az egész lánc mentén állandó, azaz

$$(2.3) \quad \frac{x_1 - x_0}{s_{01}} t_{01} = \frac{x_2 - x_1}{s_{12}} t_{12} = \dots = \frac{x_n - x_{n-1}}{s_{n-1,n}} t_{n-1,n} = h.$$

Ha a $t_{k,k+1}/s_{k,k+1}$ mennyiségeket (2.3) segítségével a (2.2) egyenletekből elimináljuk, akkor

$$(2.4) \quad h \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right) + q_k = 0$$

Ha a (2.8) egyenlet mindkét oldalát balról az $e^* = [1, 1, \dots, 1]$ sorvektorral szorozzuk,

$$\frac{y_{01}}{l_{01}} + \frac{y_{n-1}}{l_{n-1,n}} = e^* C y = \frac{1}{h} e^* q = \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1}}{h}$$

adódik. Ez az egyenlet összefüggést állapít meg az össztehernek a horizontális feszültséghez való viszonya és a szélső láncrudak hajlásai között.

2. §. Ha az összes függőleges terhelő erők egyenlők és ekvidisztánsak, azaz

$$q_1 = q_2 = \dots = q_{n-1} = q$$

$$l_{01} = l_{12} = \dots = l_{n-1,n} = l,$$

akkor

$$(2.10) \quad C = \frac{1}{l} C_0 = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad q = q e = q \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{bmatrix}$$

és (2.8), (2.10) szerint

$$y = \frac{l}{h} C_0^{-1} q e = \frac{lq}{2h} \begin{bmatrix} 1(n-1) \\ 2(n-2) \\ . \\ . \\ . \\ (n-1)1 \end{bmatrix},$$

vagyis valamennyi láncsukló az

$$(2.11) \quad y = \frac{q}{2hl} x(nl - x)$$

parabolán fekszik.

Az $(n-1)q$ össztehernek a h horizontális feszültséghez való viszonya ez esetben

$$\frac{(n-1)q}{h} = \frac{y_1 + y_{n-1}}{l} = \frac{2y_1}{l}.$$

A legmélyebb csukló, illetve csukló pár ordinátája (2.11) szerint

$$\frac{q}{h} \frac{n^2 - 1}{8} l \quad \text{páratlan } n\text{-re}$$

$$\frac{q}{h} \frac{n^2}{8} l \quad \text{páros } n\text{-re.}$$

Az 1. fejezetben kimutattuk, hogy a $-\mathbf{C}_0 \mathbf{y}$ mátrix-szorzat elemei a

$$0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, 0$$

számsorozat második differenciáival egyenlők. Ha most (2.8)-ban az

$$nl = L; \quad \mathbf{C} = \frac{n}{L} \mathbf{C}_0; \quad q_k = q\left(\frac{kL}{n}\right) \cdot \frac{L}{n}$$

helyettesítéseket végezzük (itt $q(x)$ jelentse az x helyen a hosszegységre eső megoszló terhelést), akkor az

$$\frac{n}{L} \mathbf{C}_0 \mathbf{y} = \frac{1}{h} \mathbf{q} \frac{L}{n}$$

egyenletet, és innen az $n \rightarrow \infty$, $l = L/n \rightarrow 0$ határátmenettel a jól ismert

$$(2.12) \quad -\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{h} q(x)$$

differenciálegyenletet nyerjük, mely egy kötélnek a $q(x)$ megoszló terhelés hatása alatt elfoglalt egyensúlyi alakját határozza meg.

Függőleges erőkkel terhelt gerenda egyensúlya

3. §. Vizsgáljunk egy egyenes rugalmas gerendát, mely terheletlen állapotban az x -tengely $(0, L)$ szakaszával esik egybe, és végpontjaiban támasztva van. Osszuk fel a gerendát a

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = L$$

abszcisszájú pontokkal az $l_{k,k+1} = x_{k+1} - x_k$ hosszúságú (x_k, x_{k+1}) szakaszokra. Az (x_k, x_{k+1}) szakasz keresztmetszetének inercianyomatéka legyen $J_{k,k+1}$, a gerendaanyag rugalmassági modulusa pedig legyen E .

Ha ez a gerenda az x_k osztáspontokban támadó transzverzális q_k erők hatása alatt egyensúlyban van, akkor az ezen pontokban fellépő m_k hajlítófeszültségek, v_k lehajlások és a q_k erők között az alábbi összefüggéseknek kell fennállaniuk:

$$(2.13) \quad \frac{v_{k+1} - v_k}{l_{k,k+1}} - \frac{v_k - v_{k-1}}{l_{k-1,k}} + \frac{1}{6E} \left\{ \frac{l_{k,k+1}}{J_{k,k+1}} m_{k+1} + 2 \left(\frac{l_{k,k+1}}{J_{k,k+1}} + \frac{l_{k-1,k}}{J_{k-1,k}} \right) m_k + \frac{l_{k-1,k}}{J_{k-1,k}} m_{k-1} \right\} = 0$$

$$(2.14) \quad \frac{m_{k+1} - m_k}{l_{k,k+1}} - \frac{m_k - m_{k-1}}{l_{k-1,k}} + q_k = 0.$$

Ha most még a (2.7) mátrixokon kívül a \mathbf{K} hajlékonysági mátrixot és az \mathbf{m} , \mathbf{v} oszlopmátrixokat is bevezetjük:

$$(2.15) \quad \mathbf{K} = \frac{1}{6E} \begin{bmatrix} 2 \left(\frac{l_{01}}{J_{01}} + \frac{l_{12}}{J_{12}} \right) & \frac{l_{12}}{J_{12}} & \dots \\ \frac{l_{12}}{J_{12}} & 2 \left(\frac{l_{12}}{J_{12}} + \frac{l_{23}}{J_{23}} \right) & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ m_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_{n-1} \end{bmatrix},$$

akkor a (2.13) és (2.14) egyensúlyi egyenletek és a támasztott végeknek megfelelő

$$(2.16) \quad y_0 = y_n = 0, \quad m_0 = m_n = 0$$

kerületi feltételek az alábbi mátrixegyenletekbe foglalhatók össze:

$$(2.17) \quad \mathbf{C} \mathbf{v} = \mathbf{K} \mathbf{m}$$

$$(2.18) \quad \mathbf{C} \mathbf{m} = \mathbf{q}.$$

Ha ezen egyenletekből \mathbf{m} -et kiküszöböljük, akkor a következő alakban kapjuk meg az összefüggést a v_k lehajlások és a q_k transzverzális erők között:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{v} &= \mathbf{q} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{C}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{q}. \end{aligned}$$

4. §. Egyenletes lánchíd esetén a gerenda egyenlő szakaszokra van osztva és keresztmetszetének inercianyomatéka állandó:

$$l_{01} = l_{12} = \dots = l; J_{01} = J_{12} = \dots = J; \mathbf{C} = l^{-1} \mathbf{C}_0.$$

A \mathbf{K} hajlékonysági mátrix ebben az esetben kifejezhető \mathbf{C}_0 és az \mathbf{E} egységmátrix segítségével:

$$\mathbf{K} = \frac{l}{EJ} \begin{bmatrix} \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \cdot \end{bmatrix} = \frac{l}{EJ} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{6} \mathbf{C}_0 \right).$$

Ha a \mathbf{K} és \mathbf{C} mátrixok ezen kifejezéseit a (2.17) és (2.18) egyenletekbe helyettesítjük, akkor azok az

$$\frac{EJ}{l^2} \mathbf{C}_0 \mathbf{v} = \left(\mathbf{E} - \frac{1}{6} \mathbf{C}_0 \right) \mathbf{m}$$

$$\frac{1}{l} \mathbf{C}_0 \mathbf{m} = \mathbf{q}$$

egyszerűbb alakba mennek át.

Ha ezekben a mátrixegyenletekben az 1. fejezet 1. §-ban részletesen leírt határártmenetet elvégezzük $l = L/n$, $n \rightarrow \infty$ esetére, akkor az alábbi jól ismert differenciálegyenleteket nyerjük:²⁾

$$(2.19) \quad -EJ \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = m(x)$$

$$(2.20) \quad -\frac{d^2 m(x)}{dx^2} = q(x) .$$

Ezek a $q(x)$ transzverzális megoszló terhelés alatt álló gerenda $v(x)$ lehajlását és $m(x)$ hajlítófeszültségét határozzák meg.

3. fejezet

1. §. Kéttágú lánchíd alapegyenletei és azoknak megoldása

A most tárgyalandó lánchíd két lánctagból, egy függesztórúdból és egy támasztott gerendából áll.

A 2a. ábra azt az állapotot mutatja, midőn a láncot csupán a p holt teher (önsúly) terheli (vagyis az az erő, mely a gerenda-középpont és a támasztáspontok kollineáritásának fenntartásához szükséges). Ebben az állapotban a lánc egyensúlyi egyenlete (2.18) szerint

$$(3.1) \quad \frac{2}{l} y = \frac{1}{h} p .$$

Terheljük most a gerendát középpontjában q transzverzális erővel (élőteher, 2b. ábra). Ennek a tehernek valamely \tilde{q} részét a lánc hordja, és ennek folytán feszültségének h horizontális komponense H -ra változik. Ebben az állapotban az egyensúlyi egyenlet

$$(3.2) \quad \frac{2}{l} (y + v) = \frac{1}{H} (p + \tilde{q}) .$$

²⁾ Lásd pl.: [6], 268—269 oldalak.

A (3.1) és 3.2) egyenletek kivonásával nyerjük a lánckialakváltozási egyenletét :

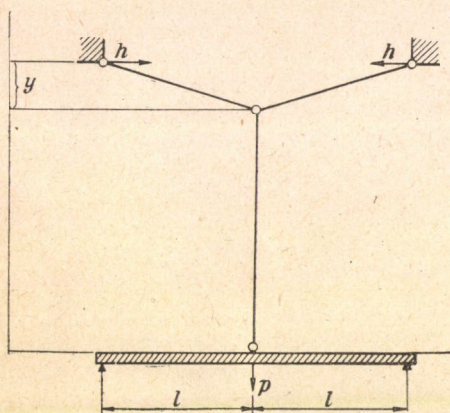
$$\frac{2}{l} v = \frac{1}{H} \left(\tilde{q} - \frac{H-h}{h} p \right).$$

A gerenda $q - \tilde{q}$ terhet hordoz, tehát annak közepén a hajlítófeszültség:³⁾

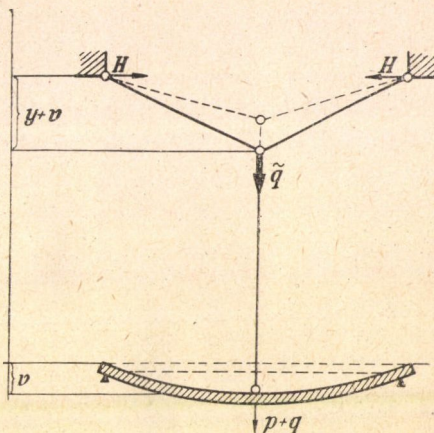
$$(3.4) \quad m = \frac{(q - \tilde{q}) l}{2}$$

és a lehajlás :

$$(3.5) \quad v = \frac{(q - \tilde{q}) l^3}{6 EJ}.$$



2a. ábra



2b. ábra

Ha a (3.4) és (3.5) egyenletekből \tilde{q} -t elimináljuk, akkor a hajlítófeszültség, lehajlás és a terhelés között az alábbi összefüggés adódik :

$$(3.6) \quad \frac{2}{l} m + \frac{2H}{l} v = q - \frac{H-h}{h} p.$$

Ha azonban $(q - \tilde{q})$ -t a (3.4) és (3.5) egyenletekből elimináljuk, akkor a hajlítófeszültség és a lehajlás közt fennálló

$$(3.7) \quad \frac{2}{l} v = \frac{4l}{6 EJ} m$$

összefüggést nyerjük. Ha már most v -vek innen származó értékét (3.6)-ba helyettesítjük, akkor a lánchíd „feszültségi egyenletéhez” jutunk :

$$(3.8) \quad \left(\frac{2}{l} + H \frac{4l}{6 EJ} \right) m = q - \frac{H-h}{h} p.$$

³⁾ Lásd pl.: [5], 680—681 oldalak.

Innen a hajlítófeszültség explicit formulája :

$$(3.9) \quad m = \frac{q - \frac{H-h}{h} p}{\frac{2}{l} + H \frac{4l}{6EJ}} .$$

A hajlítófeszültségnek a lánc közreműködése folytán bekövetkező csökkenése világosan felismerhető, ha a (3.9) egyenlettel adott értéket a (3.4) egyenletből (a lánc hiányában) adódó

$$m = \frac{ql}{2}$$

értékkel összehasonlítjuk.

Ha végül a (3.7)-ből adódó m értéket (3.6)-ba helyettesítjük, akkor a lánchíd „alakváltozási egyenlete” adódik :

$$(3.10) \quad \left(\frac{6EJ}{l^3} + \frac{2H}{l} \right) v = q - \frac{H-h}{h} p$$

és innen a lehajlásnak az explicit formulája

$$(3.11) \quad v = - \frac{q - \frac{H-h}{h} p}{\frac{6EJ}{l^3} + \frac{2H}{l}} .$$

A lehajlásnak a lánc közreműködésétől származó csökkenését ezen formulának (3.5)-tel való összehasonlítása mutatja.

A lehajlásnak (3.11) formulája még a következő alakban is írható :

$$(3.12) \quad v = \frac{1}{H} \left\{ \left(\frac{2}{l} \right)^{-1} - \left(\frac{2}{l} + H \frac{4l}{6EJ} \right)^{-1} \right\} \left(q - \frac{H-h}{h} p \right) ,$$

mely később különösen célszerűnek és általánosíthatónak fog bizonyulni.

2. §. Összes formuláinkban előfordul a megváltozott és egyelőre ismeretlen H horizontális feszültség. Ennek a kiszámítása céljából a lánctagok nyúlási viszonyait kell figyelembe venni.

Mindkét lánctag relatív nyúlása a középső csuklónak v vertikális elmozdulása folytán (magasabb rendű kis mennyiségek elhanyagolása mellett)

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{\sqrt{l^2 + (y+v)^2} - \sqrt{l^2 + y^2}}{\sqrt{l^2 + y^2}} \approx \frac{yv}{s^2} ,$$

vagy y -nak (3.1)-ből eredő értékét felhasználva :

$$(3.13) \quad \frac{\Delta s}{s} = \frac{plv}{2hs^2} .$$

Másrészt a teljes feszültségnövekedés a lánctagokban $(H - h)s/l$, tehát a nyúlási egyenlet:

$$(3.14) \quad \frac{\Delta s}{s} = \frac{H - h}{EF} \frac{s}{l}$$

ahol F a tagok keresztmetszetének területe. A (3.13) és (3.14) egyenletekből

$$(3.15) \quad v = \frac{h(H - h)}{p EF} 2 \frac{s^3}{l^2}$$

következik.

Ha végül v -t a (3.11)–(3.15) egyenletekből elimináljuk, akkor H meghatározására szolgáló fent említett másodfokú egyenletet nyerjük:

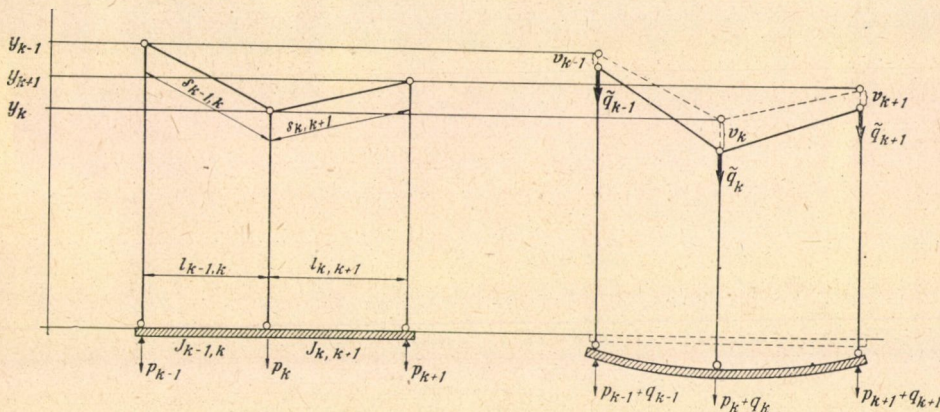
$$(3.16) \quad \frac{q - \frac{H - h}{h} p}{6 \frac{EJ}{l^3} + 2 \frac{H}{l}} = \frac{h(H - h)}{p EF} 2 \frac{s^3}{l^2}.$$

Ennek az egyenletnek pozitív q esetén mindig pontosan egy olyan H gyöke van, mely nagyobb, mint h .

4. fejezet

Egy n -tagú lánchíd mátrixegyenletei és azok megoldása

Vizsgáljunk most egy olyan lánchidat, mely n lánctagból, $n - 1$ függesztőrúdból és egy végpontjain támasztott gerendából áll (3. ábra). Jelöljük



3. ábra

$l_{01}, l_{12}, \dots, l_{n-1,n}$ a gerendaszakaszok hosszát ;
 $J_{01}, J_{12}, \dots, J_{n-1,n}$ a keresztmetszetek inercianyomatékait ;
 $s_{01}, s_{12}, \dots, s_{n-1,n}$ a lánctagok hosszát ;
 $y_0 = 0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n = 0$ a láncsuklók ordinátáit ;
 p_1, p_2, \dots, p_{n-1} a gerendacsomópontok kollinearitásának fenntartásához szükséges, az egyes láncsuklókra holt teherként ható erőket.

A híd szimmetriája folytán fennállnak az alábbi egyenletek :

$$\begin{aligned}
 l_{k-1,k} &= l_{n-k,n-k+1} , & p_k &= p_{n-k} , \\
 J_{k-1,k} &= J_{n-k,n-k+1} , & y_k &= y_{n-k} , \\
 s_{k-1,k} &= s_{n-k,n-k+1} .
 \end{aligned}$$

Ha a lánc a holt teher hatása alatt egyensúlyban van, akkor a (2.8) egyenlet szerint fenn kell állni a

$$(4.1) \quad \mathbf{C} \mathbf{y} = \frac{1}{h} \mathbf{p}$$

egyenletnek, ahol \mathbf{C} és \mathbf{y} a (2.7)-ben bevezetett mátrixokat, \mathbf{p} a p_1, p_2, \dots, p_{n-1} holt terhek mátrixát és h a kezdeti horizontálfeszültséget jelentik.

Legyen ezek után a gerenda (merevítő tartó) csomópontjaiban a

$$q_1, q_2, \dots, q_{n-1} , \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \end{bmatrix}$$

vertikális erőkkel (élő teher) terhelve.

A lánc ennek a tehernek egy bizonyos $\tilde{\mathbf{q}}$ részét fogja hordozni, és ennek folytán csuklóí vertikális elmozdulásokat szenvednek, melyek egy \mathbf{v} oszlop-mátrixba foglalhatók össze, továbbá a láncfeszültség horizontális komponense H -ra fog változni.

Ebben az állapotban a lánc egyensúlyi egyenlete a következő :

$$(4.2) \quad \mathbf{C}(\mathbf{y} + \mathbf{v}) = \frac{1}{H}(\mathbf{p} + \tilde{\mathbf{q}}) .$$

A (4.1) és (4.2) egyenletek kivonásával nyerjük a lánc alakváltozási egyenletet :

$$(4.3) \quad \mathbf{C} \mathbf{v} = \frac{1}{H} \left(\tilde{\mathbf{q}} - \frac{H-h}{h} \mathbf{p} \right) .$$

Alkalmazzuk már most a gerenda számára a 2. fejezetben levezetett egyensúlyi egyenleteket.

A gerenda a $q - \tilde{q}$ terhet hordozza és az innen származó m hajlítófeszültségi mátrixot (2.18) szerint az alábbi egyenlet határozza meg:

$$(4.4) \quad C m = q - \tilde{q} .$$

A v lehajlási mátrix és az m hajlítófeszültségi mátrix közt (2.17) szerint fennáll a következő egyenlet:

$$(4.5) \quad C v = K m .$$

Ha \tilde{q} -t a (4.3) és (4.4) egyenletekből elimináljuk, akkor a következő összefüggés adódik a hajlítófeszültség, a lehajlás és a terhelés között:

$$(4.6) \quad C(m + H v) = q - \frac{H - h}{h} p .$$

Ha most $C v$ -nek (4.5)-ből adódó értékét (4.6)-ba helyettesítjük, akkor a *lánchíd feszültségi egyenletét* nyerjük:

$$(4.8) \quad (C + H K) m = q - \frac{H - h}{h} p .$$

Innen a hajlítófeszültség explicit formulája:

$$(4.9) \quad m = (C + H K)^{-1} \left(q - \frac{H - h}{h} p \right) .$$

Ha végül m -nek (4.5)-ből adódó értékét: $K^{-1} C v$ -t (4.6)-ba helyettesítjük, akkor a *lánchíd alakváltozási egyenletéhez* jutunk:

$$(4.10) \quad (CK^{-1}C + HC) v = q - \frac{H - h}{h} p .$$

A v együttható mátrixának a kiszámítása, tehát látszólag az invertálása is rendkívül nehézkes és bonyolult. Azonban egy alkalmas identitás felhasználásával a (3.12)-vel analóg megoldási formulát fogunk tudni megadni. E mátrixidentitás a következő:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} (CK^{-1}C + HC)^{-1} &= \{CK^{-1}(C + HK)\}^{-1} = \\ &= (C + HK)^{-1} KC^{-1} = H^{-1} \{C^{-1} - (C + HK)^{-1}\} . \end{aligned}$$

A lehajlásnak explicit, gyakorlati számításra alkalmas formulája tehát a következő:

$$(4.12) \quad v = H^{-1} \{C^{-1} - (C + HK)^{-1}\} \left(q - \frac{H - h}{h} p \right) .$$

A (4.9) és (4.12) formulák összehasonlításából látható, hogy az \mathbf{m} hajlítófeszültségi mátrix kiszámítása után a \mathbf{v} lehajlási mátrixnak a kiszámítása feltűnően egyszerű feladat, mert az ennek folyamán szükségessé váló \mathbf{C}^{-1} reciprokmatricát a (2.9) képlet explicit alakban adja meg.

Ha a jelen paragrafusban levezetett formulákat egyetlen függesztörűddal bíró lánchídra alkalmazzuk, akkor az összes mátrixok skalárokra redukálódnak és pedig a híd szimmetriája folytán

$$\mathbf{C} = \frac{2}{l} ; \quad \mathbf{K} = \frac{4}{6} \frac{l}{EJ}$$

lesz. Ez esetben a (4.1)—(4.12) egyenletek a (3.1)—(3.12) egyenletekbe mennek át. Ezzel kimutattuk, hogy az n -tagú lánchíd egyenletei a 3. fejezet elemi, skalár egyenleteiből, megfelelő mátrixok helyettesítésével származtathatók.

Analógia mutatkozik a H meghatározására szolgáló egyenlet felállításánál is.

Ha a k -adik lánccsukló koordinátái terhelés előtt, illetve után (x_k, y_k) , illetve $(x_k + u_k ; y_k + v_k)$, akkor $s_{k,k+1}$ -nek $\Delta s_{k,k+1}$ növekedését az

$$(s_{k,k+1} + \Delta s_{k,k+1})^2 - s_{k,k+1}^2 = \\ = (x_{k+1} + u_{k+1} - x_k - u_k)^2 + (y_{k+1} + v_{k+1} - y_k - v_k)^2 - (x_{k+1} - x_k)^2 - (y_{k+1} - y_k)^2$$

egyenlet határozza meg. Innen — magasabbrendű kis mennyiségek elhanyagolásával —

$$s_{k,k+1} \Delta s_{k,k+1} = (x_{k+1} - x_k)(u_{k+1} - u_k) + (y_{k+1} - y_k)(v_{k+1} - v_k)$$

adódik.

Ha ezeket az egyenleteket ($l_{k,k+1} = x_{k+1} - x_k$ -val való osztás után) $k = 0$ -tól $k = n - 1$ -ig összegezzük, akkor

$$(4.13) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s_{k,k+1} \Delta s_{k,k+1}}{l_{k,k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} (v_{k+1} - v_k)$$

adódik.

Ha a lánccsukló rögzítettek, akkor

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = 0.$$

Továbbá (4.1)-re való tekintettel nyerjük, hogy

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} - \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \right) v_k = (\mathbf{C} \mathbf{y})^* \mathbf{v} = \frac{1}{h} \mathbf{p}^* \mathbf{v}.$$

Az $s_{k,k+1}$ hosszúságú lánctag nyúlási egyenlete:

$$\frac{\Delta s_{k,k+1}}{s_{k,k+1}} = \frac{H - h}{EF} \frac{s_{k,k+1}}{l_{k,k+1}}.$$

Ezen értékeknek a (4.13) egyenletbe való helyettesítése után

$$\mathbf{p}^* \mathbf{v} = \frac{(H-h)h}{EF} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s_{k,k+1}^3}{l_{k,k+1}^2},$$

vagy a (4.12) egyenlet figyelembevételével

$$(4.14) \quad \mathbf{p}^* \{ \mathbf{C}^{-1} - (\mathbf{C} + H \mathbf{K})^{-1} \} \left(\mathbf{q} - \frac{H-h}{h} \mathbf{p} \right) = \frac{H(H-h)h}{EF} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s_{k,k+1}^3}{l_{k,k+1}^2}$$

adódik.

Ez az n -edfokú algebrai egyenlet határozza meg a H horizontális feszültséget, mint a hídkonstánsoknak és a terhelésnek a függvényét.

5. fejezet

Végtelen sok tagú lánchíd (kábelhíd) differenciálegyenlete és annak megoldása

Vizsgáljuk most az n -tagú lánchídból $n \rightarrow \infty$ esetben keletkező függőhidat, mely egy kábelből, egy függesztőmembránból és egy L hosszúságú támasztott gerendából áll.

Jelöljük

a keresztmetszet inercianyomatékát az x helyen $J(x)$ -szel;

a kábel ordinátáját az x helyen $y(x)$ -szel;

a gerenda egyenes alakjának fenntartásához szükséges, holt teherként ható, megoszló terhelést az x helyen és a hosszegységre vonatkoztatva $p(x)$ -szel.

A híd szimmetriája folytán fennállnak az alábbi egyenletek:

$$J(x) = J(L-x), \quad y(x) = y(L-x), \quad p(x) = p(L-x).$$

Ha a kábel a holtteher hatása alatt egyensúlyban van, akkor (2.12) szerint fenn kell állnia a

$$(5.1) \quad -\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \frac{1}{h} p(x)$$

differenciálegyenletnek.

Terheljük most a gerendát $q(x)$ megoszló vertikális terheléssel (élő teher). A kábel a tehernek egy bizonyos $\tilde{q}(x)$ részét fogja hordani, ennek folytán annak pontjai $v(x)$ vertikális elmozdulást szenvednek és a h horizontális feszültség H -ra fog változni. Ebben az állapotban az egyensúlyi egyenlet:

$$(5.2) \quad -\frac{d^2}{dx^2} \{y(x) + v(x)\} = \frac{1}{H} \{p(x) + \tilde{q}(x)\}.$$

(5.1)-ből és (5.2)-ből következik :

$$(5.3) \quad -\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{1}{H} \left\{ \tilde{q}(x) - \frac{H-h}{h} p(x) \right\} .$$

A gerenda a $q(x) - \tilde{q}(x)$ terhet hordozza és az ennek folytán benne keletkező $m(x)$ hajlító feszültséget (2.20) szerint az alábbi differenciálegyenlet határozza meg :

$$(5.4) \quad -\frac{d^2 m(x)}{dx^2} = q(x) - \tilde{q}(x) .$$

A $v(x)$ lehajlás és az $m(x)$ hajlítófeszültség között (2.19) szerint fennáll a

$$(5.5) \quad -\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ(x)} m(x)$$

differenciálegyenlet.

Ha (5.3)-ból és (5.4)-ből $\tilde{q}(x)$ -et elimináljuk, akkor

$$(5.6) \quad -\frac{d^2}{dx^2} \{ m(x) + Hv(x) \} = q(x) - \frac{H-h}{h} p(x) .$$

adódik. Ha $d^2 v(x)/dx^2$ -nek (5.5)-ből adódó értékét (5.6)-ba helyettesítjük, akkor a kábelhíd feszültségi (differenciál-)egyenletét nyerjük :

$$(5.7) \quad -\frac{d^2 m(x)}{dx^2} + \frac{H}{EJ(x)} m(x) = q(x) - \frac{H-h}{h} p(x) .$$

A támasztásnak megfelelő kerületi feltételek :

$$(5.8) \quad m(0) = m(L) = 0 .$$

Ha továbbá $m(x)$ -nek (5.5)-ből adódó értékét (5.6)-ba helyettesítjük, akkor a lehajlás számára a jól ismert Melan-féle differenciálegyenletet nyerjük :

$$(5.9) \quad EJ \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - H \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = q(x) - \frac{H-h}{h} p(x) .$$

Ezt a differenciálegyenletet az alábbi kerületi feltételek mellett kell megoldani :

$$(5.10) \quad v(0) = v''(0) = v(L) = v''(L) = 0 .$$

A függőhidakkal foglalkozó dolgozatok többségében a Melan-féle differenciálegyenlet direkt tárgyalását találjuk. Az előző paragrafuseredményei, különösen az ottani (4.12) inverziós formula közelfekvővé teszik, hogy a Melan-féle differenciálegyenletet a Green-függvény segítségével a feszültségi egyenletre vezessük vissza.

Ebből a célból a következőképpen járhatunk el. Legyen $G(x, \xi; \lambda)$ a

$$(5.11) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{\lambda}{EJ(x)} z = 0$$

differenciálegyenletet és a

$$(5.12) \quad z(0) = z(L) = 0$$

kerületi feltételeket kielégítő Green-függvény. Ha átmenetileg bevezetjük az

$$r(x) = q(x) - \frac{H - h}{h} p(x)$$

rövidebb jelölést, akkor a fenti Green-függvény segítségével — mely most az inverz mátrix szerepét veszi át — az $m(x)$ hajlítófeszültség számára az (5.7) feszültségi egyenletből a következő explicit kifejezést nyerjük:

$$(5.13) \quad -m(x) = \int_0^L G(x, \xi; H) r(\xi) d\xi.$$

A $v(x)$ lehajlás azonban (5.5) szerint ugyancsak az (5.11) differenciálegyenletnek felel meg $\lambda = 0$ paraméter érték mellett és ugyanazoknak a (5.12) kerületi feltételeknek, következésképpen a $G(x, \xi; 0)$ függvény segítségével explicit előállítható:

$$-v(x) = \int_0^L G(x, \xi; 0) \frac{1}{EJ(\xi)} m(\xi) d\xi.$$

Ha ide $m(x)$ -nek (5.13) alatti értékét helyettesítjük, akkor

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_0^L G(x, t; 0) \frac{1}{EJ(t)} \left\{ \int_0^L G(t, \xi; H) r(\xi) d\xi \right\} dt = \\ &= \int_0^L \left\{ \int_0^L G(x, t; 0) \frac{1}{EJ(t)} G(t, \xi; H) dt \right\} r(\xi) d\xi \end{aligned}$$

adódik.

Az utolsó zárójelben fellépő „iterált” Green-függvény azonban egy HILBERT-től származó azonosság segítségével a

$$H^{-1} \{ G(x, \xi; 0) - G(x, \xi; H) \}$$

alakra hozható, mely lényegében nem egyéb, mint a (4.11) mátrixformula infinitezimális analogonja.⁴⁾

⁴⁾ Lásd: [4], 21. oldal.

Eszerint a Melan-féle differenciálegyenlet megoldása a $G(x, \xi; \lambda)$ Green-függvény segítségével a következő módon állítható elő:

$$(5.14) \quad v(x) = \frac{1}{H} \int_0^L \{G(x, \xi; 0) - G(x, \xi; H)\} \left\{ q(\xi) - \frac{H-h}{h} p(\xi) \right\} d\xi.$$

Könnyen verifikálható, hogy a KÁRMÁN⁵⁾, BLEICH [2] és mások által megadott megoldási formulák, mint speciális esetek (5.14)-ben foglaltatnak.

6. fejezet

Az egyenletes függőhíd

Összes eddigi eredményeink általánosan érvényesek lánchidakra, melyeknél az egyes gerendaszakaszok hossza és keresztmetszetének inercianyomatéka tetszőlegesen előírtak, valamint kábelhidakra, melyeknél a keresztmetszet inercianyomatéka tetszőlegesen változó.

A jelen fejezetben egyenletes függőhidakkal foglalkozunk, melyeknél a merevítő tartó keresztmetszetének inercianyomatéka állandó, és — lánchíd esetében — a függesztőrudak ekvidisztánsok.

A rendkívüli egyszerűsödések, melyek ilyen hidak matematikai vizsgálatánál mutatkoznak, két körülményre vezethetők vissza.

Először is ebben az esetben a számításnál szereplő mindkét mátrix, **C** és **K** egyszerű függvénye a (dimenziótlan) \mathbf{C}_0 kontinuuánsnak. Továbbá ennek a \mathbf{C}_0 kontinuuánsnak (valamint \mathbf{C}_0 bármely $\varphi(\mathbf{C}_0)$ függvényének) mind sajátértékei, mind pedig sajátmátrixai explicit ismeretesek. Hasonló a helyzet egyenletes kábelhídnál is, mert a megfelelő $d^2z/dx^2 - \lambda z = 0$ differenciálegyenlet sajátértékei és sajátfüggvényei explicit ismeretesek.

Ha egy egyenletes lánchídnak n tagja, tehát $n - 1$ függesztőrúdja van, akkor ahhoz $n - 1$ -edrendű kontinuuáns tartozik. Ennek a kontinuuánsnak a sajátértékei:

$$(6.1) \quad \lambda_1 = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n}; \lambda_2 = 4 \sin^2 \frac{2\pi}{2n}; \dots; \lambda_{n-1} = 4 \sin^2 \frac{(n-1)\pi}{2n}$$

és sajátmátrixai (oszlopmátrix alakban írva)

$$(6.2) \quad u_1 = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \end{bmatrix}, \quad u_2 = \dots, \quad u_{n-1} = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \\ \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin \frac{(n-1)^2\pi}{n} \end{bmatrix}.$$

⁵⁾ Lásd pl.: [5], 317—319. oldalak.

Ezen sajátmátrixoknak a rendszere ortogonális és normált. Ezek a sajátmátrixok eleget tesznek a

$$\mathbf{C}_0 \mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

egyenleteknek. Innen látható, hogy a

$$(6.3) \quad \mathbf{C}_0 \mathbf{x} = \mathbf{u}_k$$

inhomogén lineáris egyenletrendszernek a megoldása rögtön felírható a következő alakban:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{u}_k.$$

Ha azonban a (6.3) egyenletrendszer jobboldalán a sajátmátrixoknak valamely

$$\mathbf{C}_0 \mathbf{x} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}$$

alakú lineáris kombinációja áll, akkor a megoldás nyilván additive tevődik össze azokból a megoldásokból, melyek az egyes sajátmátrixokhoz tartoznak, azaz

$$\mathbf{x} = \frac{\beta_1}{\lambda_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\beta_2}{\lambda_2} \mathbf{u}_2 + \dots + \frac{\beta_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \mathbf{u}_{n-1}.$$

Ilyenformán az a kérdés vetődik fel, vajon lehet-e bármely \mathbf{b} oszlop-mátrixot, mely a $\mathbf{C}_0 \mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenlet jobboldalán áll, az $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1}$ sajátmátrixok lineáris kombinációjaként előállítani? Ez a kérdés a \mathbf{C}_0 kontinuanssal kapcsolatban felvetve egyenértékű egy oszlop-mátrix harmonikus analízisének a tanulmányozásával.

Valóban, miként valamely (0 és π helyen eltűnő) $f(x)$ függvény „végtelen” harmonikus analízisének azt a $\sin x, \sin 2x, \dots$ függvények lineáris kombinációjaként

$$f(x) = \beta_1 \sin x + \beta_2 \sin 2x + \dots$$

alakban állítjuk elő, éppúgy valamely \mathbf{b} oszlop-mátrix „véges” harmonikus analízisének azt az

$$\mathbf{u}_k = \sqrt{\frac{2}{n}} \begin{bmatrix} \sin \frac{k\pi}{n} \\ \sin \frac{2k\pi}{n} \\ \vdots \\ \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \end{bmatrix}$$

sajátmátrixok lineáris kombinációjaként

$$(6.4) \quad \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}$$

alakban állítjuk elő. (A \mathbf{C}_0 kontinuáns saját mátrixai teljesen megfelelnek a sinus-függvényeknek, hiszen képei nem egyebek, mint $\sin x, \sin 2x, \dots, \sin(n-1)x$ képeinek húrpolygonjai ekvidisztáns abszcisszákkal.)

A fenti előállítás lehetősége az \mathbf{u}_k saját mátrixok rendszerének teljességéből következik.

A $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ koefficiensek kiszámításánál — éppúgy, mint végtelen Fourier-sor esetében — a saját mátrixok ortogonalitását és normált-ságát használjuk fel. Avégből ugyanis, hogy a (6.4) kifejtésben a β_k együtt-hatót megkapjuk, a (6.4) egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk balról \mathbf{u}_k^* -val. Az ortogonalitás következtében a jobboldalon valamennyi skaláris szorzat eltűnik, egyetlennek, $\mathbf{u}_k^* \mathbf{u}_k$ -nak a kivételével. Ez a szorzat azonban a normáltság miatt 1-gyel egyenlő. Ily módon

$$\beta_k = \mathbf{u}_k^* \mathbf{b}$$

adódik.

A $\mathbf{C}_0 \mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenlet megoldása tehát következésképpen végezhető: Számítsuk ki a \mathbf{b} oszlop mátrix β_k „véges” Fourier-együtthatóit a következő formula segítségével:

$$(6.5) \quad \beta_k = \mathbf{u}_k^* \mathbf{b} = \sqrt{\frac{2}{n}} \left(b_1 \sin \frac{4\pi}{n} + b_2 \sin \frac{2k\pi}{n} + \dots + b_{n-1} \sin \frac{(n-1)k\pi}{n} \right).$$

Ekkor az adott egyenlet megoldása:

$$(6.6) \quad \mathbf{x} = \frac{\beta_1}{\lambda_1} \mathbf{u}_1 + \frac{\beta_2}{\lambda_2} \mathbf{u}_2 + \dots + \frac{\beta_{n-1}}{\lambda_{n-1}} \mathbf{u}_{n-1}.$$

Mielőtt ezt a módszert az egyenletes lánchíd alapegyenleteinek megoldására felhasználnánk, még egy kiegészítést kell közbeiktatnunk.

Az alapegyenletekben nem a \mathbf{C}_0 mátrix, hanem — miként említettük — ennek a mátrixnak valamely $\varphi(\mathbf{C}_0)$ függvénye. A $\varphi(\mathbf{C}_0)$ mátrixnak azonban a mátrixelméletnek egy közismert tétele szerint (lásd pl.: [7]) \mathbf{C}_0 -lal meg-egyező saját mátrixai vannak, és sajátértékei: $\varphi(\lambda_1), \varphi(\lambda_2), \dots, \varphi(\lambda_{n-1})$. A

$$(6.7) \quad \varphi(\mathbf{C}_0) \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

alakú egyenlet megoldásánál tehát a (6.6) formulában a λ_k nevezőket $\varphi(\lambda_k)$ -val kell helyettesíteni, azaz

$$(6.8) \quad \mathbf{x} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\beta_k}{\varphi(\lambda_k)} \mathbf{u}_k.$$

A (6.6) valamint (6.8) formulák az ismeretlen \mathbf{x} oszlop mátrixnak véges Fourier-kifejtését szolgáltatják.

Ezen előkészületek lehetővé teszik, hogy egy egyenletes lánchíd alap-egyenleteit a kontinuánsmátrix sajátértékei és sajátmátrixai segítségével oldjuk meg.

Egyenletes lánchíd esetén ugyanis

$$l_{01} = l_{12} = \dots = l_{n-1,n} = l; \quad J_{01} = J_{12} = \dots = J_{n-1,n} = J,$$

továbbá többnyire

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{n-1} = p.$$

Ebben az esetben tehát

$$(6.9) \quad \mathbf{C} = \frac{1}{l} \mathbf{C}_0; \quad \mathbf{K} = \frac{l}{EJ} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{6} \mathbf{C}_0 \right), \quad \mathbf{p} = p \mathbf{e}.$$

Ezeknek felhasználásával az egyenletes lánchídnak (4.8) feszültségi egyenlete a következő alakot ölti:

$$\left\{ \mathbf{C}_0 + \frac{Hl^2}{EJ} \left(\mathbf{E} - \frac{1}{6} \mathbf{C}_0 \right) \right\} \frac{\mathbf{m}}{l} = \mathbf{q} - \frac{H-h}{h} p \mathbf{e}.$$

Az egyenlet koefficiensmátrixa tehát ez esetben $\varphi(\mathbf{C}_0)$, ahol

$$\varphi(x) = x + \frac{Hl^2}{EJ} \left(1 - \frac{x}{6} \right).$$

Avégből, hogy ezen egyenlet \mathbf{m} ismeretlenét, mint a H paraméter explicit függvényét előállíthassuk, előbb a \mathbf{q} és \mathbf{e} oszlopmátrixokon harmonikus analízist kell végrehajtanunk. (6.5) felhasználásával azt találjuk, hogy

$$(6.10) \quad \mathbf{q} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \beta_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \beta_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}; \quad \beta_k = \mathbf{u}_k^* \mathbf{q}$$

$$\mathbf{e} = \varepsilon_1 \mathbf{u}_1 + \varepsilon_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \varepsilon_{n-1} \mathbf{u}_{n-1}; \quad \varepsilon_{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cotg \frac{k\pi}{2n}; \quad \varepsilon_{2k} = 0.$$

Ezen értékeket felhasználva, a feszültségi egyenlet explicit megoldását a következő alakban nyerjük:

$$(6.11) \quad \mathbf{m} = l \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\beta_k - \frac{H-h}{h} p \varepsilon_k}{\lambda_k + \frac{Hl^2}{EJ} \left(1 - \frac{\lambda_k}{6} \right)} \mathbf{u}_k.$$

A (4.10) alakváltozási egyenlet a fentebb bevezetett jelölésekkel így írható:

$$\left\{ \frac{EJ}{l^3} \mathbf{C}_0 \left(\mathbf{E} - \frac{1}{6} \mathbf{C}_0 \right)^{-1} \mathbf{C}_0 + \frac{H}{l} \mathbf{C}_0 \right\} \mathbf{v} = \mathbf{q} - \frac{H-h}{h} p \mathbf{e}.$$

Az egyenlet együttható mátrixa most $\psi(\mathbf{C}_0)$, ahol

$$\psi(x) = \frac{EJ}{l^3} \frac{x^2}{1 - \frac{1}{6}x} + \frac{H}{l}x$$

és annak explicit megoldása a (6.10) koefficiensek felhasználásával

$$(6.12) \quad \mathbf{v} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\beta_k - \frac{H-h}{h} p \varepsilon_k}{\frac{EJ}{l^3} \frac{\lambda_k^2}{1 - \frac{\lambda_k}{6}} + \frac{H}{l} \lambda_k} \mathbf{u}_k.$$

Az χ relatív feszültségváltozást meghatározó egyenlet felállítása céljából (4.14)-ben $\mathbf{p}^* = p \mathbf{e}^*$, $H - h = \chi h$, $l_{k,k+1} = l$ helyettesítéseket végezzük, továbbá \mathbf{v} -nek (6.12) értékét is behelyettesítjük. Ily módon

$$(6.13) \quad \sum_{k=1,3,5} \frac{p \varepsilon_k \beta_k - p^2 \varepsilon_k^2 \chi}{\frac{EJ}{l^2 h} \frac{\lambda_k^2}{1 - \frac{\lambda_k}{6}} + (1 + \chi) \lambda_k} = \frac{h^3 \chi}{EF} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{s_{k,k+1}}{l} \right)^3$$

adódik. (A baloldali összegben a páros indexű tagok hiányzanak, mert valamennyi ε_{2k} eltűnik.) A $(0, \infty)$ intervallumban ezen egyenlet bal oldala csökkenő, jobb oldala pedig növekvő függvénye χ -nek. Ennélfogva egy olyan tehereloszlás mellett, mely $\chi = 0$ -nál a baloldalt pozitívvá teszi, a (6.13) egyenletnek egyetlen pozitív gyöke van. Ha ez a χ gyök ki van számítva, akkor $H = h(1 + \chi)$.

Ha a \mathbf{v} lehajlási mátrix (6.12) véges Fourier-sorában rögzített L mellett az $n \rightarrow \infty$, $l = L/n \rightarrow 0$ határátmenetet végrehajtjuk, akkor az egyenletes kábelhíd $v(x)$ lehajlási függvénye számára a következő, már KÁRMÁN, BLEICH és mások által megadott végtelen Fourier-sort nyerjük:

$$(6.14) \quad v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k - \frac{H-h}{h} p \varepsilon_k}{EJ \left(\frac{k\pi}{L} \right)^4 + H \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2} \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

Itt

$$\beta_k = \frac{2}{L} \int_0^L q(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx$$

és

$$\varepsilon_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi}; \quad \varepsilon_{2k} = 0.$$

Ugyanezen határátmenettel (6.13)-ból a χ relatív feszültségnövekedést meghatározó transzcendens egyenletet az alábbi alakban nyerjük

$$\sum_{k=1,3,5,\dots} \frac{2}{\left(\frac{k\pi}{L}\right)^3} \frac{p\beta_k - p^2\varepsilon_k\chi}{\frac{EJ}{h}\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 + (1+\chi)} = \frac{h^3\chi}{EF_0} \int_0^L \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 dx.$$

Itt ds a holt tehernek megfelelő kábelgörbe ívelemét jelenti az x helyen.

(Beérkezett : 1957. II. 25.)

IRODALOM

- [1] EGERVÁRY, E.: „Begründung und Darstellung einer allgemeinen Theorie der Hängebrücken mit Hilfe der Matrizenrechnung.” *Abhandlungen der Internationalen Vereinigung für Brücken- und Hochbau (Zürich)*.
- [2] BLEICH, H. H.: *Die Berechnung verankerter Hängebrücken*. Springer, Wien, 1935.
- [3] EGERVÁRY J.: „A mátrix-elmélet alkalmazása lánchidak számítására” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 3 (1954) 9—23.
- [4] HILBERT, D.: *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*. Teubner, Leipzig, 1912.
- [5] HÜTTE, *des Ingenieurs Taschenbuch, Band I*. Ernst, Berlin, 1949. (27., neubearbeitete Auflage).
- [6] KÁRMÁN, TH.—BIOT, M.: *Mathematical methods in engineering*. McGraw-Hill, New York, 1940.
- [7] MAC DUFFEE, C. C.: *Vectors and matrices*. Mathematical Association of America, Menasha (Wisc.), 1943.

ОБОСНОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ВИСЯЩИХ МОСТОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ МАТРИЦ*)

J. EGERVÁRY

Резюме

В некоторых новых работах, относящихся к теории висящих мостов, мы встречаемся с тенденцией ободить инфинитезимальных действий. При этом производные заменяются отношением приращения функции к приращению независимой переменной, непрерывно распределяющиеся живые нагрузки — концентрированными силами (см. [2]).

В настоящей работе мы строим конечную теорию цепных мостов. Для подходящего рассмотрения линейных уравнений, получающихся от последовательного применения уравнений СЛАРЕУВОН теории стержня и от замены возможно встречающейся непрерывно распределяющейся живой нагрузки концентрированными силами, используются вспомогательные средства теории матриц. В качестве основного уравнения цепных мостов получается такое матричное уравнение, в котором неизвестным является матрица прогибания укрепляющей опоры. Для решения этого матричного урав-

*) Содержание этой работы тождественно с работой на немецком языке [1] автора.

нения необходимо лишь обращение континуантных матриц, легко выполняемая и на машина. Схема вычисления также содержится в работе. В случае цепного моста с $n-1$ подвесным стержнем для роста горизонтального напряжения получается уравнение n -ого порядка.

Уже упомянутое матричное уравнение в случае такого предельного перехода, когда число подвесных стержней растёт до бесконечности, переходит в хорошо известное дифференциальное уравнение MELAN висящих мостов.

Последняя глава содержит упрощения, имеющие место в случае равномерных цепных мостов.

BEGRÜNDUNG UND DARSTELLUNG EINER ALLGEMEINEN THEORIE DER HÄNGEBRÜCKEN MIT HILFE DER MATRIZENRECHNUNG*)

J. EGERVÁRY

Zusammenfassung

Mehrere neuere Aufsätze über die Berechnung der Hängebrücken lassen eine Tendenz erkennen, infinitesimalen Operationen zu vermeiden. Die Differentialquotienten werden dabei durch Differenzenquotienten, die stetig verteilte lebende Last durch Knotenlaste ersetzt. (Vgl. [2].)

In der vorliegenden Arbeit wird eine finite Theorie der Kettenbrücken aufgebaut. Bei konsequenter Verwendung der Clapeyronschen Gleichungen der Balkentheorie und bei Annäherung der eventuell stetig verteilten lebenden Last durch Einzelkräfte (Knotenlaste) werden zur sachgemässen Behandlung der auf diese Weise entstehenden linearen Gleichungen matrizentheoretische Hilfsmitteln herangezogen. Als Grundgleichung einer Kettenbrücke ergibt sich eine Matrizengleichung welche als Unbekannte die Durchbiegungsmatrix des Versteifungsträgers enthält. Zur Auflösung dieser Matrizengleichung ist nur das Invertieren von Kontinuantenmatrizen notwendig, wofür einfache, auch maschinell gut durchführbare Rechenschemata angegeben werden. Bei einer Kettenbrücke mit $n-1$ Hängestäben erhält man für die Zunahme der Horizontalspannung eine Bestimmungsgleichung n -ten Grades.

Bei einer Grenzübergang, wobei die Anzahl der Hängestäbe unbegrenzt zunimmt, geht die vorher erwähnte Matrizengleichung in die wohlbekannte Melansche Differentialgleichung der Hängebrücken über.

Im letzten Paragraph werden diejenigen Vereinfachungen besprochen, welche sich bei einer gleichmässigen Kettenbrücke einstellen.

*) Diese Arbeit ist dem Inhalt nach identisch mit der deutschsprachigen Arbeit [1] des Verfassers.

A MECHANICAL FUNCTIONAL SYNTHESIZER

PÁL MEDGYESSY

The team for X-ray research of the Institute of Physics of the Eötvös-University in Budapest requested our Institute to plan a mathematical instrument with which Fourier syntheses occurring in the course of the X-ray analysis of certain crystalline materials could be carried out. All the occurring syntheses were reduced to one-dimensional ones. It was sufficient to get the results of the syntheses only in aequidistant points.

In what follows I wish to write about my work related to this problem.

Since the views of accuracy and economy predominated over that of fastness (the team for X-ray research wanted a home-made instrument) I took into account only mechanical instruments. At the same time I wanted to solve a more general problem which often occurs in applied mathematics when solutions can be obtained only in form of functional series.¹⁾ I wanted to plan an instrument for the representation of the partial sums of an *arbitrary* functional series

$$(1) \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k f_k(x) \quad (\alpha \leq x \leq \beta)$$

(α , β , a_k and $f_k(x)$ are given constants and functions, resp.) in the equidistant points $x_0 = \alpha$, $x_1, \dots, x_n = \beta$; $x_{m+1} - x_m \equiv h$, $m = 0, 1, \dots, n-1$ (leaving out of consideration, may be, certain additive and multiplicative constants).

I have already solved this problem in two of my papers (see [1], [2]) but those constructions worked, considering the demands in X-ray research, too slowly. Since no description of such an instrument of mediocre working speed has been found in the literature, I have planned the device in question.

The basic idea is as follows: Patterns are made of some hard metal. The basis of them is a straight segment scaled in such units that the length of the segment is $(\beta - \alpha)$. This basic line is divided by the equidistant points x_i ($i = 0, 1, \dots, n$). The upper part of the patterns varies: According to the functions $f_k(x)$, two patterns of „index” k (marked with S_{k1} and S_{k2} , resp.) are needed. On S_{k1} in each point x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) a „step” of breadth h is shaped

¹⁾ See e. g. the „Hermite-synthesis” dealt with in the paper: MEDGYESSY P. „Valószínűség-eloszlásfüggvények keverékének felbontása összetevőire” [A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei 2 (1953) 165—177; p. 173.]

symmetrically at the height $\max f_k(x) + f_k(x_i)$ ²⁾; on S_{k2} in the same points the „steps” are shaped at the heights $\max f_k(x) - f_k(x_i)$ ($\alpha \leq x \leq \beta$). (The patterns thus show a certain approximation of the functions $\max f_k(x) + f_k(x)$ and $\max f_k(x) - f_k(x)$, respectively, by a step function).

As an illustration the pattern S_{11} corresponding to the function $f_{11}(x) = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) may be presented. (See Fig. 1.) „Steps” are shaped in 37 aequidistant points x_i ($i = 0, 1, \dots, 36$) i. e. the scale of the basic line of the pattern is chosen as to have $x_0 = 0$, $x_{36} = \pi$ (for technical reasons the left and right edges of the pattern have been slightly modified.)

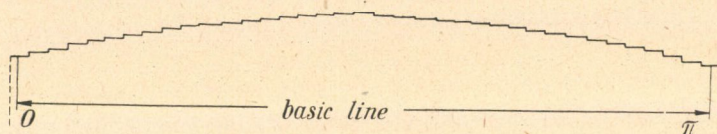


Fig. 1.

The patterns shall be fixed on a frame. This frame can be turned downwards by an arbitrary angle α ($0 \leq \alpha \leq \pi/2$) and be fixed in this position. The frame (A) with a pattern and the other component parts to be described below of the instrument are shown in profile in Fig. 2. The axis of rotation of A coincides with the basic line and the upside of the pattern fixed on A . The pattern fixed in an arbitrary position together with the frame can be shifted on a fixed distance r ; r is equal or greater then the maximum

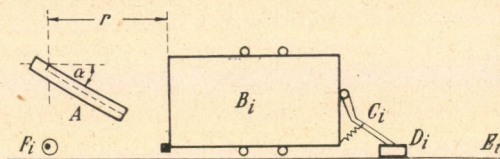


Fig. 2.

of the maximal heights of the patterns. At the shifting the i -th „step” of the pattern is pressed against a plate B_i ($i = 0, 1, \dots, n$); this will move together with the „step”. B_i starts from a defined limit being at a distance r from the axis of A and is able to move as much as A ; evidently, B_i cannot hit against A . An arm C_i , carrying a metal block D_i covered with adhesive material stands out from B_i . C_i (consequently D_i) is pressed against the bar E_i by a spring. If B_i is shifted onward then, by C_i and D_i , also E_i is shifted. (In the sequel, the bar corresponding to the „step” with a centre of coordinate x_i will also be called as a „bar of coordinate x_i ”). After the shifting the bar E_i will be fixed by a crank F_i (A remains in its final position) then, by a suitable device, A and B_i will be removed to their initial position (D_i glides on E_i). After this, F_i will be released; the bar E_i remains firmly in its new position. — The procedure may be repeated (then, in general, A is fixed at

²⁾ Here and in the sequel $\max r(x)$ (where $r(x)$ is some continuous function defined in the interval $[\alpha, \beta]$) denotes the maximum of $r(x)$ when x varies in $[\alpha, \beta]$.

an other angle); this will result, compared to the former one, in an additional shifting of the bars.

By this device the partial sums

$$(2) \quad f^*(x) = \sum_{k=0}^N a_k f_k(x) \quad (\alpha \leq x \leq \beta)$$

of (1) can be represented at the points x_i , apart from an additive and a multiplicative constant. (From the view of the (chiefly qualitative) investigations, this is sufficient.) The procedure is as follows:

First $f^*(x)$ is to be slightly transformed. Let

$$\max_k a_k = a \text{ and } a_k/a = b_k \quad (|b_k| \leq 1).$$

Then

$$f^*(x) = a \sum_{k=0}^N (a_k/a) f_k(x) \equiv a \sum_{k=0}^N b_k f_k(x).$$

Let us consider $f_0(x)$. According to the sign of $f_0(x)$, let us put the pattern S_{01} (or S_{02}) on A and turn round A by an angle σ_0 such that $\sigma_0 = \arccos |b_0|$ and fix it.³⁾ Then the instrument is set in going as described above. When A and B_i ($i = 0, 1, \dots, n$) return to their starting positions, the displacement of the bar of coordinate x_i will be $|b_0| \max f_0(x) + b_0 f_0(x_i)$. Now [according to the sign of $f_1(x)$] let us put the pattern S_{11} or S_{12} on A and turn round A by the angle $\sigma_1 = \arccos |b_1|$ and fix it. When the instrument is working, the bar of coordinate x_i moves a distance $|b_1| \max f_1(x) + b_1 f_1(x_i)$. Thus the summatory displacement of the bar will be $[|b_0| \max f_0(x) + |b_1| \max f_1(x)] + [b_0 f_0(x_i) + b_1 f_1(x_i)]$. If the procedure is repeated N times, then, for the total displacement L_i of the bar of coordinate x_i , we obtain

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_{k=0}^N |b_k| \max f_k(x) + \sum_{k=0}^N b_k f_k(x_i) \equiv \\ &\equiv K + \frac{1}{a} \sum_{k=0}^N a_k f_k(x_i) \end{aligned}$$

(in the present case K is a constant which is independent of x). If, at the starting, each bar-end pointed to the 0 point of a scale mounted beside it then, after N repetitions of the procedure the bar-ends will show the values of the ordinates of the partial sum in request in the points x_i , apart from the additive constant K and the factor $(1/a)$ — as it has been stated. If the qualitative picture of the result yielded by the bar-ends would not be satisfactory then the effective value of the partial sum can be computed simply by the values shown by the bar-ends in every point x_i .

³⁾ This procedure may be facilitated by the use of a suitable device which shows the value of $\cos \sigma_0$ directly.

I have not dealt with questions of merely technical interest. The above construction seems to be mechanically simple; it does not need gears at all.

From the technical point of view the shifting of the bar E_i by the block D_i is an awkward problem. The following solution may be proposed: On the plate B_i ($i = 0, 1, \dots, n$) nippers should be arranged. At the shifting they grasp the bar E_i both sides in order to carry it along (the block D_i pressed against the bar, which makes its motion more difficult, is omitted). Evidently the nippers should be openable when a returning to the initial state is requested.

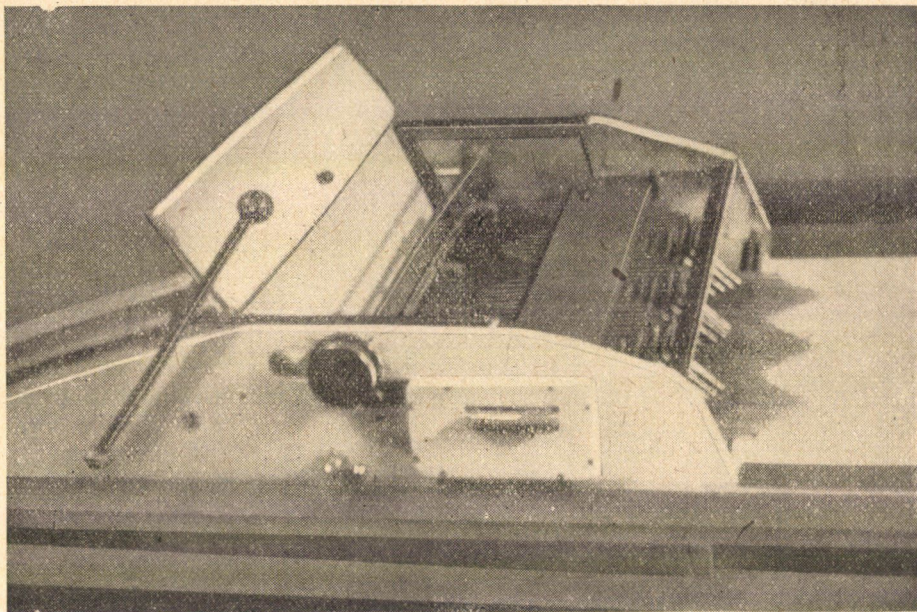


Fig. 3.

The central idea of the instrument is that of turning the patterns in order to realize the multiplication of the occurring functions by a suitable factor. *This idea made it possible that our program i. e. to present, with a suitable instrument, partial sums of series formed with arbitrary (e. g. trigonometrical, Bessel-, Hermite-, etc.) functions has been reached* (of course also suitable patterns had to be applied).

As far as I know, there is no synthesizer with such a possibility of wide-ranging applications. Up to the present a great deal of Fourier-synthesizers has only been constructed ([3], p. 286; pp. 328—329.; [4], pp. 356—393.; [5], p. 220.). These instruments are able, however, to work only with a particular system of functions.

An other advantage of my instrument is that its working does not depend on the number of the points x_i , i. e. increasing the number of the bars and applying suitable patterns, a more exact picture of the result can be obtained during the same working time. When the instrument is in action, the result

of the several steps in the summing and the evolution of the final result, resp. can be clearly observed. This is of a high didactic value.

The disadvantages of the instrument are of constructional nature (e. g. the block D_i ($i = 0, 1, \dots, n$) may slip; if the frame A stands almost vertically, the plate B_i will, eventually, not be shifted exactly; the elaboration of the patterns, and the adjustment of A , resp., may be incorrect, etc.). These difficulties and the ways to eliminate them emerge only during the building of the instrument.

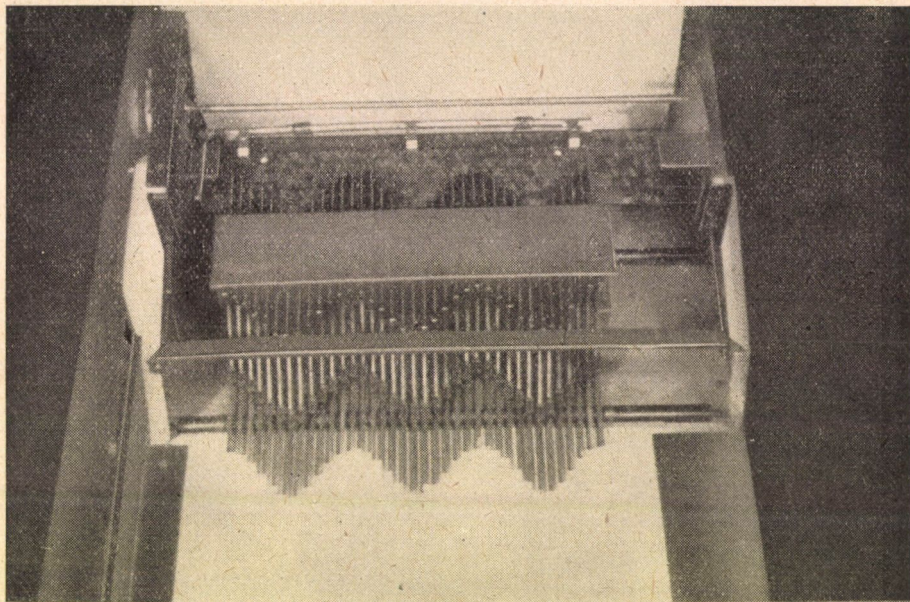


Fig. 4.

E. PÉTERVÁRI, mechanician of the Institute of Physics has built the instrument described above, according to my plans, during the years 1955 and 1956, under the directives of E. SÁNDOR, leader of the team for X-ray research. It has been designed for carrying out Fourier syntheses exclusively, i. e. the patterns S_{k1}, S_{k2} ($k = 0, 1, \dots$) have corresponded to sine (cosine) functions of amplitude 1 and of different integral frequencies. The „steps” on the patterns have been shaped in 37 aequidistant points. Consequently, there occur 37 bars E_i ($i = 0, 1, \dots, 36$) in this instrument. They are placed in a distance of 1 cm. from each other. By the kind permission of the team for X-ray research in the Institute of Physics I present two photographs of the instrument in action (see Fig. 3. and 4.) (it is opened). On both, the elements of Fig. 2. can be recognized easily. In order to demonstrate the exactness of the instrument I communicate the following example of Fourier synthesis carried out by the team for X-ray research, in course of its work, by aid of the instrument:

The partial sum

$$g(x) = \sum_{k=0}^{12} a_k \cos kx \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

was to be determined in the points $x_i = (\pi/36)i$ ($i = 0, 1, \dots, 36$). The values of a_k were

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_k	275	175	489	151	350	124	211	85	103	48	32	13	3

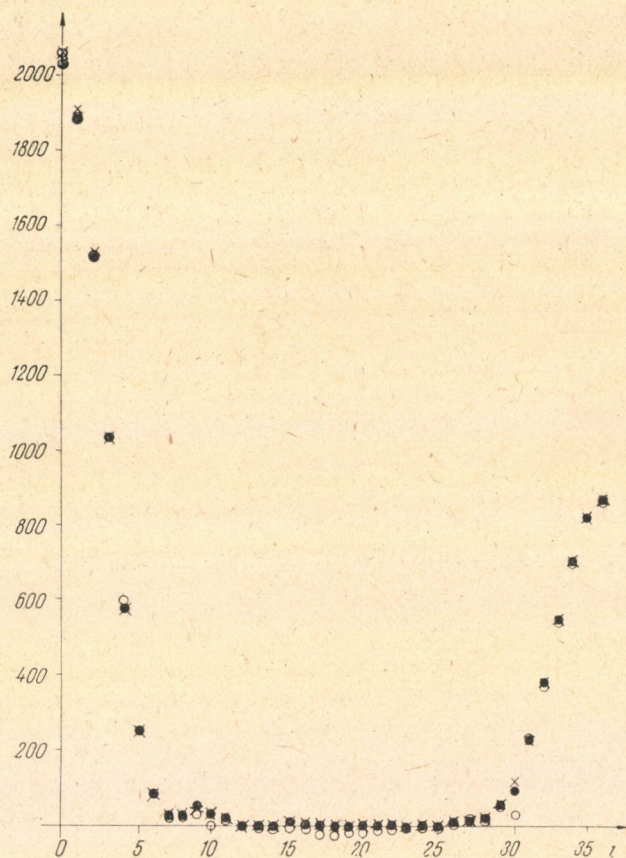


Fig. 5.

In Fig. 5. the exact (computed) values of $g(x_i)$ are marked by \times , those obtained with the instrument [say, $g^*(x_i)$] by \circ . The character of the errors $|g(x_i) - g^*(x_i)|$ committed by the instrument can be well studied. The errors are caused by the gliding of the blocks D_i , etc.

In order to eliminate them, the team for X-ray research proposed the following method: Let the instrument to present the sum

$$f(x) = \sum_{k=0}^{12} a_k(-\cos kx) \equiv -g(x) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

in the above points x_i (i. e. related to the case of $g(x)$, the patterns shall be changed, but the a_k -s remain). In general the values $h^*(x_i)$ yielded by the instrument in the points x_i at the end of the procedure will differ from the theoretical values $h(x_i) \equiv -g(x_i)$ (the error may be represented by the values $|h(x_i) - h^*(x_i)|$ again). It can be shown that, with a great probability, the values $\frac{1}{2}[g^*(x_i) - h^*(x_i)] \equiv l^*(x_i)$ will have a smaller deviation from the theoretical values $g(x_i)$ than the values $g^*(x_i)$ alone. Thus, carrying out the summation with the instrument in the case of $g(x)$ and $h(x)$, resp., the values $l^*(x_i)$ obtained with the result of both procedure will probably yield a better approximation of the theoretical result. — This method has been applied at the summing mentioned above. Its result is marked by ● in Fig. 5.. In fact, this is a better one than that marked by the sign ○, — as it might have been expected. It is clear that the repeating of the whole procedure and the averaging of the particular results will always increase the reliability of the method.

The accuracy and fastness of the instrument has been found sufficient by the team for X-ray research. It seems to be useful to have it built again in a technically better and fully automatised realization. (Until now, patterns for trigonometrical functions have only been completed.)

If we merely deal with a Fourier synthesis, the operating of the instrument is, to some extent, similar to that of the Fourier synthesizer of V. CAIMANN and W. HOPPE [6]. At the latter, horizontally moving sine (cosine) patterns of continuous boundary are pressed against a device similar to that consisting of the set of the elements B_i, C_i, D_i, E_i ($i = 0, 1, \dots, n$) in Fig. 2. (also here the result is shown by displacement of bar-ends.). The trigonometrical functions on the patterns are of the same amplitude, the effect of the coefficients of a partial sum of type (2) can be reached instead of turning downward the patterns, by a suitable lateral shifting of them. Since the edges of the patterns are continuous it is, however, to be feared that if they are pressed against the plates corresponding to those marked by B_i ($i = 0, 1, \dots, n$) in the described instrument, they will begin to move them away after some gliding only. (Apart from the possibility of an inexact adjustment of the patterns, this latter effect may involve a permanent source of error. With my instrument this kind of error cannot occur.) No need to say that, by the instrument of CAIMANN and HOPPE, no partial sums involving other types of functions as the trigonometrical ones can be presented. Thus its scope of working is, in general, more restricted than that of the instrument described in this paper.

(Received: 7. V. 1957.)

REFERENCES

- [1] MEDGYESSY P.: „Új készülék Fourier-szintézis és analízis, valamint hasonló sorfejtési feladatok elvégzésére”. *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* 2 (1953) 179—185.

- [2] MEDGYESSY P.: „Szorzatintegrálás, Fourier-szintézis és hasonló feladatok elvégzése kvadrát-planiméter és egy új készülék kombinációjának segítségével”. *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 129—137.
- [3] MEYER ZUR CAPELEN, W.: *Mathematische Instrumente*. (III. Auflage) Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1949.
- [4] СЕРЕБРЕННИКОВ, М. Г.: *Гармонический анализ*. Огиз Гостехиздат, Москва—Ленинград, 1948.
- [5] WILLERS, FR. A.: *Mathematische Maschinen und Instrumente*. Akademie-Verlag, Berlin, 1951.
- [6] CAIMANN, V.—HOPPE, W.: „Die Berechnung von ein- und mehrdimensionalen Fourier-Reihen mit einem mechanischen Überlagerer neuer Konstruktion”. *Zeitschrift für angewandte Physik* **5** (1953) 120—130.

EGY MECHANIKAI FÜGGVÉNY-SZINTÉTIZÁTOR

MEDGYESSY PÁL

Kivonat

A dolgozat egy mechanikus készüléket ismertet, amelynek a segítségével az

$$f^*(x) = \sum_{k=0}^N a_k f_k(x) \quad (a \leq x \leq \beta)$$

függvénysor-szelet előállítható az ekvidisztáns x_i pontokban ($i = 0, 1, \dots, n$; $x_0 = a, x_n = \beta$); itt a, β, N, a_k ($k = 0, 1, \dots, N$) adott konstansok, az $f_k(x)$ függvények pedig *tetszőlegesek*. A készülék alapötlete új; röviden a következőkben ismertetjük: A $\max f_k(x) + f_k(x)$, illetve $\max f_k(x) - f_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, N$) függvényekhez sablonokat készítünk, amelyek alapvonala $(\beta - a)$ hosszúságú. (Itt a \max az $a \leq x \leq \beta$ intervallumra értendő.) A sablonok felső szélét olyan lépcsős függvény szerint vágjuk ki, amelynél az egyes lépcsők egyforma szélességűek és az egyes lépcsők középpontjai az $(x_i, \max f_k(x) + f_k(x_i))$, illetve az $(x_i, \max f_k(x) - f_k(x_i))$ pontokban vannak. (Példa: 1. ábra). Ezeket a sablonokat S_{k1} -gyel, illetve S_{k2} -vel jelöljük. A sablonok az A keretre erősíthetők (2. ábra). A lefelé elforgatható, majd rögzíthető. Egy adott szög alatt rögzített sablont nekitolunk a B_i lemezeknek. Ezek elmozdulnak és a C_i, D_i alkatrészek segítségével magukkal viszik az E_i mutatórudakat. Az A keret elmozgatása után az E_i rudakat az F_i excenterekkel lerögzítjük, majd az A keretet kiindulási helyzetébe visszük vissza. — Rögzítsük most A -t (és vele együtt a sablont) más szög alatt és ismételjük meg a készülékkel az előbb leírt eljárást. Ekkor az E_i rudak a megelőzőn felül újabb eltolódást szenvednek, emellett az egyes elmozdulások összegeződnek. — Legyen $\max_k a_k = a$. Készülékünk a

$$\text{konst.} + \sum_{k=0}^N \frac{a_k}{a} f_k(x)$$

összeget (azaz állandóktól eltekintve $f^*(x)$ -et) fogja előállítani az x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) pontokban, ha a következő eljárást alkalmazzuk: $f_0(x) +$ illetve $-$ előjelének megfelelően az S_{01} vagy S_{02} sablont ráhelyezzük A -ra.

Ezután A -t lefelé forgatjuk $\alpha_0 = \arccos |a_0/a|$ szöggel, rögzítjük, majd a készüléket működésbe hozzuk. Amikor működése befejeződött, az E_i rudak bizonyos hosszúsággal elmozdultak. Most A -t visszavisszük kezdeti helyzetébe és — $f_1(x)$ előjelének megfelelően — az S_{11} vagy S_{12} sablont helyezzük rá. A -t (és a sablont) most $\alpha_1 = \arccos |a_1/a|$ szöggel forgatjuk lefelé, rögzítjük, és a készüléket ismét működésbe hozzuk. Az E_i rudak elmozdulása hozzá fog adódni az előzőhöz. — Az eljárást folytatjuk; világos, hogy végül is az E_i rudak végei az említett összeget fogják mutatni az x_i pontokban (kvalitatív vizsgálatok szempontjából ez elegendő).

A készülék megépítése technikailag egyszerű. Fogaskereknek nincsenek benne. Egyetlen nehézség és komoly hibaforrás az esetleges csúszás az E_i rudak elmozgatásánál. Ennek a kiküszöbölésére egy másik megoldást is kidolgoztunk a rudak eltolására. Azon felül, hogy a sablonok változtatásával tetszőleges függvények szuperponálását érjük el, előnye a készüléknek az is, hogy a sablonok lépcsői (és így a B_i, C_i, D_i, E_i alkatrészek) számának növelésével az eredmény több pontban is megkapható, mint az itt leírt esetben mégpedig ugyanannyi idő alatt, mint itt. Megjegyzendő még, hogy az eredmény kialakulása is mindig megfigyelhető. — A készülék tervében a lényegesen új ötlet kétségtelenül a sablonok elforgatása az a_k faktorok figyelembevétele céljából.

Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Fizikai Intézetében megépítették a leírt készüléket, de csak a Röntgen-sugaras anyagszerkezet-vizsgálatokban szükséges Fourier-szintézisek elvégzésére (lásd: 3. és 4. ábra). Az 5. ábrán a \times , \circ , illetve \bullet jelek egy bizonyos koszinusz-sor-szelet kiszámított, az itt leírt készülékkel kapott, illetve az itt leírt készülékkel bizonyos kompenzációs eljárás mellett kapott értékeit mutatják ekvidisztáns pontokban.

Fourier-szintézis szempontjából a jelen készülék működése hasonlít a CAIMANN- és HOPPE-féle Fourier-szintetizátor [6] működéséhez, mentes azonban annak egyes hibaforrásaitól. Más függvény-szintézis esetén persze nem pótolhatja készülékünket a CAIMANN- és HOPPE-féle.

МЕХАНИЧЕСКИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ СИНТЕТИЗАТОР

P. MEDGYESSY

Резюме

В работе описывается механический инструмент, с помощью которого отрезок функционального ряда

$$f^*(x) = \sum_{k=1}^N a_k f_k(x) \quad (\alpha \leq x \leq \beta)$$

может быть представлен в эквидистантных точках $x_i (i = 0, 1, \dots, n; x_0 = \alpha, x_n = \beta)$; здесь $\alpha, \beta, a_k (k = 1, 2, \dots, N)$ данные постоянные, а функции $f_k(x)$ — произвольны. Основная идея инструмента является новой и состоит в следующем: Для функций $\max f_k(x) + f_k(x)$ и $\max f_k(x) - f_k(x)$ ($k = 1, \dots, N$) (max относительно x) готовятся шаблоны, базис которых имеет длину $(\beta - \alpha)$. Верхний край шаблонов вырезан по такой ступенчатой функции, у которой отдельные ступеньки обладают одинаковой шириной и центры ступенек находятся в точках $(x_i, \max f_k(x) - f_k(x_i))$ и

$(x_i, \max f_k(x) - f_k(x_i))$, соответственно (рис. 1). Эти шаблоны обозначаются через S_{k1} и S_{k2} , соответственно. Шаблоны могут быть закреплены на рамке (рис. 2). А можно вращать вниз, потом зафиксировать. Шаблон, установленный под данным углом, наталкивается на пластинки B_i . Они смещаются и — с помощью составных частей C_i, D_i — ведут с собой показательные стержни E_i . После передвижения рамки A стержни E_i закрепляются эксцентрическими дисками F_i , а рамка A ведется назад в исходное положение. Закрепим A (и, следовательно, шаблон) под другим углом и повторим описанную игру. Тогда стержни E_i терпят новое передвижение вверх предыдущего и отдельные передвижения суммируются. — Пусть $\max a_k = a$. Наш инструмент будет представлять сумму

$$\text{konst.} + \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a} f_k(x)$$

(т. е. — несмотря на постоянные — $f_k^*(x)$ в точках x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) если применяется следующая процедура: По знаку $+$ ($-$) $f_1(x)$, шаблон S_{11} или S_{12} будет наложен на A . Потом A вращается вниз на угол $\alpha_1 = \arccos |a_1/a|$, закрепляется и инструмент приводится в действие. Когда действие закончилось, стержни E_i передвинуты на некоторое расстояние. Теперь A возвращается в начальное положение и, по знаку $f_2(x)$, шаблон S_{21} , или S_{22} налагается на нее. Потом A (и шаблон) вращается вниз на $\alpha_2 = \arccos |a_2/a|$, закрепляется и инструмент снова приводится в действие. Передвижение стержней E_i будет добавляться к предыдущему. — Процедура продолжается; очевидно, что, в конце концов, концы стержней E_i покажут упомянутую сумму в точках x_i (это, с точки зрения качественных исследований, достаточно).

Строение инструмента технически просто. Зубчатых колес в нем нет. Единственная трудность и серьезный источник ошибок — возможное скольжение при передвижении стержней E_i . Для устранения ее предполагается другой способ перемещения стержней. Кроме того, что изменением шаблонов достигается суперпозиция произвольных функций, преимуществом инструмента является и то, что через увеличение числа ступенек шаблонов (и, следовательно, частей B_i, C_i, D_i, E_i) результат может быть получен в большем числе точек чем в описанном случае, причем в тот же промежуток времени. Заметим еще, что образование результата всегда может наблюдаться. Существенно новая идея в плане инструмента, несомненно, вращение шаблонов с целью устанавливания факторов a_k .

В Институте Физики Университета им. Л. Еötvös (Budapest) описанный инструмент был построен, но только для синтеза Фурье, необходимого при исследовании структуры вещества рентгеновскими лучами (см. рис. 3 и 4). Знаки \times , \circ и \bullet , соответственно, на рис. 5 показывают вычисленные, полученные с нашим инструментом и полученные с инструментом при некотором компенсационном процессе, соответственно значения отрезка некоторого ряда косинусов в эквидистантных точках.

С точки зрения синтеза Фурье функционирование нашего инструмента похоже на функционирование синтетизатора Фурье САЙМАНН и НОРРЕ [6], но свободно от некоторых источников ошибок последнего. В случае синтеза других функций наш инструмент не может быть, конечно, заменен инструментом САЙМАНН и НОРРЕ.

AZ $L(z)$ VALÓSZÍNŰSÉG-ELOSZLÁSFÜGGVÉNYRŐL

RÉNYI ALFRÉD

A valószínűesszámitásban és a matematikai statisztikában, különösen a rendezett minták elméletében szerepet játszik az

$$(1) \quad L(z) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8z^2}}}{2k+1} \quad (z > 0)$$

eloszlásfüggvény. Három tételt említünk meg, amelyekben ez a függvény előfordul.

1°. ERDŐS PÁL és M. KAC 1946-ban bebizonyították ([1]), hogy ha $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ egyforma eloszlású független valószínűségi változók, amelyeknek várható értékük 0 és szórásuk 1, továbbá

$$\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \quad \text{és} \quad \zeta_n = \max_{1 \leq k \leq n} |\eta_k|,$$

akkor ζ_n/\sqrt{n} eloszlásfüggvénye $L(z)$ -hez konvergál, ha $n \rightarrow \infty$.

2°. M. KAC 1949-ben kimutatta ([2]), hogy az $L(z)$ függvény adja meg

$$\sqrt{\mu} \sup_{-\infty < x < \infty} |F_\nu(x) - F(x)|$$

határeloszlását, ha $F_\nu(x)$ egy $F(x)$ folytonos eloszlásfüggvényű valószínűségi változó értékeiből vett ν -elemű $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu)$ minta empirikus eloszlásfüggvénye, ahol ν maga is valószínűségi változó, amely független a $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ változóktól, és μ várható értékű Poisson-eloszlással rendelkezik: a határeloszlás a $\mu \rightarrow \infty$ esetre értendő.

3°. A rendezett minták elméletére vonatkozó dolgozatomban ([3]) bebizonyítottam, hogy ha $F_n(x)$ egy $F(x)$ folytonos eloszlásfüggvényű valószínűségi változó értékeire vonatkozó n elemű minta empirikus eloszlásfüggvénye, akkor

$$\sqrt{n} \sup_{0 < a \leq F(x)} \left| \frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)} \right|$$

eloszlásfüggvénye, ha $n \rightarrow \infty$, az $L(z \sqrt{a/(1-a)})$ függvényhez konvergál. $L(z \sqrt{a/(1-a)})$ értékeinek táblázata megtalálható J. JANKO [11] táblázat-

gyűjteményében is (246—247. oldalak). $L(z)$ numerikus meghatározása z kicsiny értékeire (pl. ha $|z| < 3$) az (1) sor első néhány tagjának kiszámításával igen jó pontossággal elvégezhető; ha azonban z értéke nagy, az (1) sor konvergenciája lassú. Ezért bír érdekességgel, hogy $L(z)$ -re olyan előállítást találjunk, amely viszont éppen z nagy értékeire teszi lehetővé $L(z)$ értékének viszonylag kevés fáradsággal, nagy pontossággal való meghatározását.¹⁾ Az alábbiakban $L(z)$ egy ilyen előállításával foglalkozunk.

A szóban forgó előállítás a következő:

$$(2) \quad L(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{\pi y}{2z} \right) dy ,$$

ahol $z > 0$ tetszőleges, és $\operatorname{sgn} x$ az x szám előjele, vagyis

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 . \end{cases}$$

A (2) jobboldalán álló integrál értéke a

$$(3) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

normális eloszlásfüggvény értéktáblázata segítségével igen könnyen kiszámítható; e célból célszerű a (2) azonosságot a következő alakra hozni:²⁾

$$(4) \quad L(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \{ \Phi((2k+1)z) - \Phi((2k-1)z) \} .$$

A (2), illetve (4) azonosságra alábbiakban három egyszerű bizonyítást adunk, amelyek tulajdonképpen ugyanannak a bizonyításnak különböző változatai.

A (3) képlet módot nyújt az $L(z)$ eloszlás momentumainak meghatározására is, ezért (2) bebizonyítása után röviden kitérünk $L(z)$ momentumainak (2) alapján való kiszámítására is.

Első bizonyítás. Az első bizonyítás, amit bemutatunk, a ϑ -függvényekre vonatkozó ismert sorfejtések és transzformációs képletek felhasználásán alapszik. Könnyen belátható ugyanis, hogy

$$(5) \quad L(z) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \vartheta_2 \left(v \left| \frac{i\pi}{2z^2} \right. \right) dv ,$$

¹⁾ A (4) előállítás felhasználásra került az $L(z\sqrt{a/(1-a)})$ függvény [11]-ben szereplő táblázatának elkészítésénél. A numerikus számításokat PÁLÁSTI ILONA végezte.

²⁾ $L(z)$ (4) alatti alakja nem tekinthető újnak, megtalálható pl. [10]-ben. Azonban az irodalomban nem találtam meg $L(z)$ (1), illetve (4) alakjai azonosságának közvetlen és egyszerű bizonyítását.

ahol (lásd: [4], 195. oldal) $\Im \tau > 0$ esetében

$$(6) \quad \vartheta_2(v|\tau) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{\pi i \left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 \tau} \cos(2k+1)\pi v.$$

Mármost felhasználva a

$$(7) \quad \vartheta_2(v|\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}} e^{-\frac{i\pi v^2}{\tau}} \vartheta_0\left(\frac{v}{\tau} \middle| -\frac{1}{\tau}\right)$$

ismert transzformációs képletet (lásd [4], 248. oldal), ahol

$$(8) \quad \vartheta_0(v|\tau) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{i\pi \tau k^2} \cos 2k\pi v,$$

ha $\Im \tau > 0$, és tagonként integrálva nyerjük a (4) és abból a (2) azonosságot.

Második bizonyítás. A (2) képlet egy másik bizonyítását is bemutatjuk, ami a hővezetési egyenlet elméletének egy jólismert tételén alapszik.

Keressük meg azt az $u(x, t)$ függvényt, amely a $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$ félsíkban x szerint kétszer, t szerint pedig egyszer folytonosan deriválható, korlátos, eleget tesz a

$$(9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

hővezetési egyenletnek és a

$$(10) \quad \lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = \operatorname{sgn}(\cos \pi x) \quad -\infty < x < +\infty$$

peremfeltételnek. Ismeretes (lásd: [5], III. tétel), hogy az előírt feltételek az $u(x, t)$ függvényt egyértelműen meghatározzák. Mármost nem nehéz verifikálni, hogy az

$$(11) \quad U(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k+1)\pi x}{2k+1} e^{-\frac{\pi^2 t(2k+1)^2}{2}}$$

függvény eleget tesz a (9) és (10) feltételeknek. Másrészt ismeretes (lásd: [5]), hogy a (9) egyenletnek eleget tevő $u(x, t)$ függvény az x -tengely menti peremértékei segítségével általában a következőképpen fejezhető ki:

$$(12) \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} u(y, 0) dy.$$

Behelyettesítve (12) jobboldalán az $u(y, 0) = \operatorname{sgn}(\cos \pi y)$ függvényt, nyerjük, hogy a (11) alatti $U(x, t)$ függvény a következőképpen fejezhető ki:

$$(13) \quad U(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \operatorname{sgn}[\cos \pi(x + y\sqrt{t})] dy.$$

Összehasonlítva (11)-et és (13)-at, következik, hogy

$$(14) \quad \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos (2k+1)\pi x}{2k+1} e^{-\frac{\pi^2 t(2k+1)^2}{2}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \operatorname{sgn} [\cos \pi(x+y\sqrt{t})] dy .$$

Helyettesítve (14)-be az $x=0$ és $t=1/4z^2$ értékeket, kapjuk a (2) azonosságot. A (14) azonosság egyben (2) általánosításának is tekinthető.

Harmadik bizonyítás. Végiggondolva a második bizonyítást, azt úgy jellemezhetjük, hogy a (9) hővezetési egyenletet a (10) peremfeltétel mellett kétféleképpen oldottuk meg: először a megoldást az

$$e^{-\frac{k^2 \pi^2 t}{2}} \cos k\pi x \quad (k=0, 1, \dots)$$

alapmegoldásokból, másodszor az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}} \quad -\infty < a < +\infty$$

alapmegoldásokból raktuk össze, és a két eredmény azonosságából következettünk a (2) azonosság fennállására. Ez a módszer általános esetben is alkalmazható. Ha $f(x)$ egy tetszőleges 2π periódusú integrálható függvény, amelynek Fourier-sora

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) ,$$

akkor

$$(15) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) e^{-\frac{n^2 t}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} f(y) dy .$$

A (15) azonosság Fouriertől származik ([6]). (15) jobboldalán $f(x)$ Fourier-sorának úgynevezett $(A, 2)$ közepei állnak ([7]). Weierstrass a folytonos függvények trigonometrikus polinomokkal való egyenletes approximálhatóságára vonatkozó híres tételét éppen a (15) azonosság segítségével bizonyította be. (Lásd: [8], Vol. 3., p. 20.) (2) tehát felfogható, mint a Fourier-féle (15) azonosság speciális esete is.

A momentumok kiszámítása

(4)-ből könnyen következik, hogy

$$(16) \quad L'(z) = l(z) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) e^{-\frac{(2k+1)^2 z^2}{2}} .$$

Másrészt (1)-ből

$$(17) \quad l(z) = \frac{\pi}{z^3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{8z^2}}.$$

Tehát a

$$(18) \quad \lambda(z) = l(z) z^{3/2}$$

függvény eleget tesz a

$$(19) \quad \lambda(z) = \lambda\left(\frac{\pi}{2z}\right)$$

függvényegyenletnek. (Ezt itt csak közbevetőleg jegyeztük meg; (19)-re a momentumok meghatározásához nincs szükségünk.)

A (16) képlet alkalmas $L(z)$ momentumainak kiszámítására. Ugyanis (16)-ból

$$(20) \quad M_n = \int_0^{\infty} z^n l(z) dz = \frac{2^{\frac{n}{2}+1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}.$$

Speciálisan

$$(21) \quad M_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

és

$$(22) \quad M_2 = 2G$$

ahol

$$(23) \quad G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 0,915965594 \dots$$

az úgynevezett CATALAN-féle állandó (lásd: [9], II. kötet, 2. oldal), és így a szórásnégyzet;

$$(24) \quad D^2 = 2G - \frac{\pi}{2}.$$

(Beérkezett: 1957. II. 15.)

IRODALOM

- [1] ERDŐS, P.—KAC, M.: „On certain limit theorems of the theory of probability.” *Bulletin of the American Mathematical Society* **52** (1946) 292—302.
- [2] KAC, M.: „On deviations between theoretical and empirical distributions.” *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* **35** (1949) 252—257.
- [3] RÉNYI, A.: „On the theory of order statistics.” *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **4** (1953) 191—231.

- [4] HURWITZ, A.—COURANT, R.: *Funktionentheorie*. Springer, Berlin, 1939.
- [5] CZIPSZER J.: „Hővezetés a végtelen rúdiban, I.” *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **3** (1954) 395—408. és II., *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 185—192.
- [6] FOURIER, J. B.: „Théorie analytique de la chaleur.” *Oeuvres de Fourier*, Vol. 1. Paris, Gauthier-Villars, 1888, pp. 426—427.
- [7] HARDY, G. H.: *Divergent series*. Oxford, 1949.
- [8] WEIERSTRASS, K.: „Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlichen Funktionen reeller Argumente.” *Mathematische Werke von K. Weierstrass*, Mayer—Müller, Berlin, 1903.
- [9] GRÖBNER, W.—HOFREITER, W.: *Integraltafeln*. Springer, Wien, 1950.
- [10] GRENANDER, U.—ROSENBLATT, M.: „Statistical spectral analysis of time series arising from stationary stochastic processes.” *Annals of Mathematical Statistics* **24** (1953) 537—558; „Comments on statistical spectral analysis.” *Skandinavisk Aktuarietidskrift* **36** (1953) 82—202.
- [11] JANKO, J.: *Statistické tabulky*. Československé Akademie Věd, Praha, 1958.

О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $L(z)$

A. RÉNYI

Резюме

В теории вероятностей и математической статистики функция распределения

$$(1) \quad L(z) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2}{8z^2}}}{2k+1}$$

играет известный роль. (См. напр. [1], [2], [3].)

Ряд (1) быстро сходится для малых z , но быстрота сходимости уменьшается если z возрастает. Поэтому нужно другое выражение для $L(z)$, которое выгодно для больших значений от z . Для этой цели служит формула

$$(2) \quad L(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \operatorname{sgn}\left(\cos \frac{\pi y}{2z}\right) dy$$

($z > 0$) (где $\operatorname{sgn} a$ означает знак от a), которое может быть преобразовано также в

$$(3) \quad L(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \{\Phi((2k+1)z) - \Phi((2k-1)z)\},$$

где

$$(4) \quad \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Хотя (3) имеется в [10], автор статьи не нашёл в литературе простой вывод формулы (3) соотв. (2) из (1). В работе даны три доказательства формулы (3). Первое доказательство использует преобразование от ϑ -функций, второе формулы для решения уравнения теплопроводности и третье

тождество от FOURIER: если $f(x)$ периодическая интегрируемая функция с периодом 2π , и ряд FOURIER от $f(x)$ есть

$$(5) \quad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

то имеет место для $t > 0$

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) e^{-\frac{n^2 t}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} f(y) dy.$$

Формула (2) получается из (6) для $f(y) = \operatorname{sgn}(\cos y)$.

В конце работы вычислены моменты функции распределения. В частности получается

$$(7) \quad \int_0^{\infty} z dL(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} z^2 dL(z) = 2G$$

где G постоянное CATALAN.

ON THE DISTRIBUTION FUNCTION $L(z)$

A. RÉNYI

Summary

Many problems of probability theory and statistics lead to the cumulative distribution function

$$(1) \quad L(z) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{8z^2}}}{2k+1} \quad z > 0.$$

(see e. g. [1], [2], [3]). The series on the right of (1) converges rapidly for small values of z , but for large values of z the convergence is slow. Therefore an other formula for $L(z)$ is needed, which enables to calculate easily the values of $L(z)$ for large values of z . This need is met by the formula

$$(2) \quad L(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{\pi y}{2z} \right) dy \quad z > 0$$

where $\operatorname{sgn} x$ is the sign of x ($\operatorname{sgn} x = +1$ for $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = 0$ for $x = 0$ and $\operatorname{sgn} x = -1$ for $x < 0$). Putting

$$(3) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

the formula (2) may be brought also to the form

$$(4) \quad L(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \{ \Phi((2k+1)z) - \Phi((2k-1)z) \}.$$

By means of (4) we can calculate the value of $L(z)$ for large values of z , using a table for $\Phi(x)$.

For the identity (2) three variants of the same proof are given. (The formula (4) can be found e. g. in [10], but the author did not find in the literature a simple deduction of the formulae (2) resp. (4) from (1).)

The first proof makes use of a transformation formula for thetafunctions, the second of the representation in two different forms of the solution of the heat equation, the third is based on a classical formula, due to FOURIER [7], according to which if $f(x)$ is an integrable periodic function with period 2π , the Fourier-series of which is

$$(5) \quad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

then for $t > 0$ we have

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) e^{-\frac{n^2 t}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} f(y) dy.$$

Applying this formula to

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$$

whose Fourier-series is

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos(2k+1)x}{2k+1}$$

and putting

$$t = \left(\frac{\pi}{2z} \right)^2$$

we obtain (2) from (6) for $x = 0$.

Finally it is pointed out that (2) enables us to calculate easily the moments of the distribution function $L(z)$; we obtain

$$M_n = \int_0^{\infty} z^n dL(z) = \frac{2^{\frac{n}{2}+1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}.$$

Especially $M_1 = \sqrt{\pi/2}$ and the variance of $L(z)$ is equal to $2G - \pi/2$ where G is CATALAN'S constant.

ON THE CONVERGENCE OF SEQUENCES OF RANDOM VARIABLES (A REMARK ON A PROBLEM OF A. PRÉKOPA)

PÁL RÉVÉSZ

Introduction

In the paper [1] the following problem is mentioned.

Let ξ_1, ξ_2, \dots denote a sequence of independent random variables. Let us suppose, that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$$

converges with probability 1 regardless of the order of summation. Let A_i ($i = 1, 2, \dots$) be sets of natural numbers with the property that if $B_n = A_n + A_{n+1} + \dots$ then

$$\prod_{n=1}^{\infty} B_n = 0$$

In [1] it is shown that for every $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\xi(A_n)| > \varepsilon\} = 0$$

where

$$\xi(A_n) = \sum_{k \in A_n} \xi_k$$

and the problem is formulated whether the stronger relation

$$(1) \quad \mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(A_n) = 0\} = 1$$

holds. In view of the relation

$$\xi(B_n) = \xi(B_n - A_n) + \xi(A_n)$$

where on the right-hand side there stand independent random variables, it can be seen that (1) would be true if for every sequences $\xi_n, \eta_n, \zeta_n = \xi_n + \eta_n$ of random variables satisfying the conditions

$$a) \mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 0\} = 1$$

$$b) \xi_n \Rightarrow 0, \quad \eta_n \Rightarrow 0$$

$$c) \text{ for every } n, \xi_n \text{ and } \eta_n \text{ are independent,}$$

there would follow :

$$\mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0\} = \mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0\} = 0.$$

[The convergence to 0 with probability 1 of the sequence $\xi(B_n)$ follows immediately from the relation

$$\xi(B_n) = \sum_{k \in B_n} \xi_k$$

where the series on the right-hand side converges with probability 1 (Cf. [2] p. 118., Corollary 1.).]

We shall show, however, that this assertion in general does not hold. In this paper we consider not only this last problem but the following more general one:

If $\zeta_n = \xi_n + \eta_n$ and ξ_n, η_n are independent random variables for every n ($n = 1, 2, \dots$), further ζ_n converges to 0 in some sense, what kind of convergence to 0 is implied for ξ_n and η_n by this relation if the convergence of ξ_n and η_n to 0 in some other sense is supposed.

We take into account the following kinds of convergence :

1. *Uniform convergence.* ξ_n converges to 0 uniformly, if for every $\varepsilon > 0$ there exists an $n_0(\varepsilon)$ such that $\mathbf{P}\{|\xi_n| < \varepsilon\} = 1$ provided that $n \geq n_0(\varepsilon)$.

2. *Convergence with probability 1.* ξ_n converges to 0 with probability 1, if

$$\mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0\} = 1.$$

3. *Convergence in the mean (en moyenne).* ξ_n converges to 0 in the mean, if $\mathbf{M}(\xi_n^2) \rightarrow 0$

4. *Weak convergence.* ξ_n converges to 0 weakly if $\mathbf{M}(\xi_n \zeta) \rightarrow 0$ where ζ is an arbitrary random variable with a finite variance.

In the cases 3. and 4. we assume that the mean and variance of all the random variables in question exist.

5. *Stochastic convergence.* ξ_n converges to 0 stochastically ($\xi_n \Rightarrow 0$), if for every $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\xi(A_n)| > \varepsilon\} \rightarrow 0.$$

1. §. First case: $\mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 0\} = 1$

I. Let $\zeta_n = \xi_n + \eta_n$. We shall prove that there exist such sequences of random variables ξ_n, η_n that the following conditions hold:

a) $\mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 0\} = 1$

b) $\xi_n \Rightarrow 0, \quad \eta_n \Rightarrow 0$

c) ξ_n, η_n are independent,

but

d) $\mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0\} = \mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0\} = 0$.

Let the sample space be the interval $[0, 1]$ and the probability measure the Lebesgue measure. In this case the random variables are Lebesgue measurable real functions. We define the variables ξ_n, η_n as follows.

Let I_n, K_n, L_n be the following intervals:

$$I_n = [(l-1) \cdot 10^{-2(k+1)}, l \cdot 10^{-2(k+1)}]$$

$$K_n = [1 - 10^{-(k+1)}, 1]$$

$$L_n = \begin{cases} \left[1 - 10^{-(k+1)} - \frac{1 - 10^{-(k+1)} - 10^{-2(k+1)}}{10^{k+1} + 1}, 1 - 10^{-(k+1)} \right], & \text{if } 1 \leq l \leq 5 \sum_{j=k+1}^{2k+1} 10^j \\ \left[0, \frac{1 - 10^{-(k+1)} - 10^{-2(k+1)}}{10^{k+1} + 1} \right], & \text{if } 5 \sum_{j=k+1}^{2k+1} 10^j < l \leq 9 \sum_{j=k+1}^{2k+1} 10^j \end{cases}$$

where $1 \leq l \leq 9 \sum_{j=k+1}^{2k+1} 10^j$ for $k = 0, 1, 2, \dots$

and

$$n = \begin{cases} 9 \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{2i+1} 10^j + l, & \text{if } k = 1, 2, \dots \\ l & \text{if } k = 0 \end{cases}$$

Let $C_n = I_n + K_n, D_n = I_n + L_n$ and we define the random variables ξ_n and $-\eta_n$ as the characteristic functions (in the sense of the theory of sets) of the sets C_n and D_n , respectively.

Now we prove that ξ_n and η_n satisfy the above conditions. Condition a) is satisfied since $\xi_n + \eta_n \neq 0$ holds only on the set $K_n + L_n$. In order to show the fulfilment of Condition b) it is sufficient to prove that $\xi_n \Rightarrow 0$. In fact, if $0 < \varepsilon < 1$, then

$$\mathbf{P}\{|\xi_n| > \varepsilon\} = \mathbf{P}\{|\xi_n| = 1\} = |I_n| + |K_n| = 10^{-(k+1)} + 10^{-2(k+1)} = \frac{1 + 10^{k+1}}{10^{2(k+1)}} \rightarrow 0$$

what was to be proved. Let us now consider Condition *c*). The random variables ξ_n and η_n can take on only the values 0, 1 and 0, -1, respectively. Thus ξ_n and η_n are independent if

$$\mathbf{P}\{\xi_n = 1, \eta_n = -1\} = \mathbf{P}\{\xi_n = 1\} \mathbf{P}\{\eta_n = -1\},$$

$$\mathbf{P}\{\xi_n = 1, \eta_n = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_n = 1\} \mathbf{P}\{\eta_n = 0\}$$

$$\mathbf{P}\{\xi_n = 0, \eta_n = -1\} = \mathbf{P}\{\xi_n = 0\} \mathbf{P}\{\eta_n = -1\},$$

$$\mathbf{P}\{\xi_n = 0, \eta_n = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_n = 0\} \mathbf{P}\{\eta_n = 0\}.$$

It is sufficient to prove that the first relation holds as the fulfilment of one of these relations implies that of the remaining ones. Since

$$\mathbf{P}\{\xi_n = 1\} = \frac{10^{k+1} + 1}{10^{2(k+1)}},$$

$$\mathbf{P}(\eta_n = -1) = |I_n| + |L_n| = 10^{-2(k+1)} + \frac{1 - 10^{-(k+1)} - 10^{-2(k+1)}}{1 + 10^{(k+1)}} = \frac{1}{1 + 10^{(k+1)}},$$

$$\mathbf{P}\{\xi_n = 1, \eta_n = -1\} = |I_n| = 10^{-2(k+1)},$$

(where $|I_n|$, $|K_n|$, $|L_n|$ denote the lengths of the intervals I_n , K_n , L_n , respectively) our assertion holds. From the definition of the sequences ξ_n and η_n it is easy to see that *d*) holds.

II. This example shows that there exist such sequences ξ_n , η_n which satisfy the following stronger conditions:

$$a) \mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0\} = 1$$

$$b^*) \mathbf{M}(\xi_n^2) \rightarrow 0, \mathbf{M}(\eta_n^2) \rightarrow 0$$

$$c) \xi_n, \eta_n \text{ are independent for every } n,$$

but

$$d) \mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0\} = \mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0\} = 0.$$

III. It is easy to see that Conditions *a*), *b*), *c*) neither imply that $\mathbf{M}(\xi_n^2) \rightarrow 0$ nor that ξ_n converges to 0 weakly. In fact, if $\xi_n^* = 10^{4k} \xi_n$, $\eta_n^* = 10^{4k} \eta_n$, where

$$1 \leq l \leq 9 \sum_{j=k+1}^{2k+1} 10^j \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

and

$$n = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=l+1}^{2i+1} 10^j + l & \text{if } k = 1, 2, \dots \\ l & \text{if } k = 0 \end{cases}$$

then ξ_n^* satisfy Conditions *a*), *b*), *c*) and

$$\mathbf{M}(\xi_n^*) \rightarrow \infty$$

i. e. ξ_n does not converge weakly to 0.

2. §. Second case: $\mathbf{M}(\xi_n^2) \rightarrow 0$

I. We shall show that if ξ_n, η_n satisfy the following conditions :

a) $\mathbf{M}(\xi_n^2) \rightarrow 0$

b) $\mathbf{M}(\xi_n) \rightarrow 0, \mathbf{M}(\eta_n) \rightarrow 0$

c) ξ_n, η_n are independent for every n

then

$$\mathbf{M}(\xi_n^2) \rightarrow 0, \mathbf{M}(\eta_n^2) \rightarrow 0 .$$

Proof: Since

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\xi_n^2) &= \mathbf{M}[(\xi_n + \eta_n)^2] = \mathbf{M}(\xi_n^2) + \mathbf{M}(\eta_n^2) + 2\mathbf{M}(\xi_n\eta_n) = \mathbf{M}(\xi_n^2) + \mathbf{M}(\eta_n^2) + \\ &\quad + 2\mathbf{M}(\xi_n)\mathbf{M}(\eta_n) \end{aligned}$$

and

$$\mathbf{M}(\xi_n^2) \rightarrow 0, \mathbf{M}(\xi_n) \rightarrow 0, \mathbf{M}(\eta_n) \rightarrow 0$$

we get

$$\mathbf{M}(\xi_n^2) \rightarrow 0, \mathbf{M}(\eta_n^2) \rightarrow 0 .$$

It is clear that if we replace Condition c) by the following condition :

c*) ξ_n, η_n are uncorrelated

then our statement remains true.

II. Let us now define the Condition b*) as

$$b^*) \xi_n \Rightarrow 0, \eta_n \Rightarrow 0 .$$

We shall show that if Conditions a), b*), c*) hold then the relations $\mathbf{M}(\eta_n^2) \rightarrow 0, \mathbf{M}(\xi_n^2) \rightarrow 0$ remain true.

Proof: By I. of this §. is sufficient to prove that $\mathbf{M}(\xi_n) \rightarrow 0$. Our conditions imply that

$$\mathbf{M}(\xi_n^2) = \mathbf{M}[(\xi_n + \eta_n)^2] \geq \mathbf{D}^2(\xi_n) + \mathbf{D}^2(\eta_n)$$

and thus $\mathbf{D}^2(\xi_n) \rightarrow 0, \mathbf{D}^2(\eta_n) \rightarrow 0$. Moreover, since $\mathbf{D}^2(\xi_n) \rightarrow 0$ and $\xi_n \Rightarrow 0$, we conclude $\mathbf{M}(\xi_n) \rightarrow 0$.

3. §. Third case: ξ_n converges to 0 uniformly

I. We shall prove that if ξ_n, η_n satisfy the following conditions :

a) ξ_n converges to 0 uniformly

b) $\xi_n \Rightarrow 0, \eta_n \Rightarrow 0$

c) ξ_n, η_n are independent

then ξ_n and η_n converge to 0 uniformly.

Proof: Let us suppose that ξ_n does not converge to 0 uniformly. In this case there exist an ε with the property that for every positive integer n_0 there can be found an $n \geq n_0$ so that

$$\mathbf{P}\{|\xi_n| > 2\varepsilon\} = \delta_n > 0.$$

This implies that one of the relations

$$\mathbf{P}\{\xi_n > 2\varepsilon\} \geq \frac{\delta_n}{2}, \quad \mathbf{P}\{\xi_n < -2\varepsilon\} \geq \frac{\delta_n}{2}$$

holds. We may suppose that $\mathbf{P}\{\xi_n > 2\varepsilon\} \geq \delta_n/2$, the other case can be treated similarly. Since $\xi_n + \eta_n$ converges to 0 uniformly, there exists an N such that

$$\mathbf{P}\{|\xi_n + \eta_n| \leq \varepsilon\} = 1$$

if $n \geq N$. Let $n_0 = N$; then there exists an n such that

$$\mathbf{P}\{\xi_n > 2\varepsilon\} \geq \frac{\delta_n}{2}, \quad \mathbf{P}\{|\xi_n + \eta_n| \leq \varepsilon\} = 1.$$

By comparing these inequalities it follows that if $\xi_n > 2\varepsilon$ then $\eta_n < -\varepsilon$ with probability 1. Thus

$$\mathbf{P}\{\eta_n < -\varepsilon | \xi_n > 2\varepsilon\} = 1.$$

On the other hand, ξ_n and η_n are independent, hence

$$\mathbf{P}\{\eta_n < -\varepsilon | \xi_n > 2\varepsilon\} = \mathbf{P}\{\eta_n < -\varepsilon\}.$$

Thus we conclude

$$\mathbf{P}\{\eta_n < -\varepsilon\} = 1$$

which contradicts to $\eta_n \rightarrow 0$.

From the proof it is clear that Condition c) can be weakened i. e. it is sufficient to assume that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(y) - H_n(x, y)}{1 - F_n(x)} < 1 \quad \text{if } y < 0, x > 0,$$

where

$$F_n(x) = \mathbf{P}\{\xi_n < x\}, \quad G_n(y) = \mathbf{P}\{\eta_n < y\}, \quad H_n(x, y) = \mathbf{P}\{\xi_n < x, \eta_n < y\}.$$

II. Finally we show that if Condition b) is replaced by the following one

$$b^*) \quad \mathbf{M}(\xi_n) \rightarrow 0, \quad \mathbf{M}(\eta_n) \rightarrow 0,$$

then the above statement remains true. In other terms if ξ_n and η_n have the properties

a) ξ_n converges to 0 uniformly

b*) $\mathbf{M}(\xi_n) \rightarrow 0, \quad \mathbf{M}(\eta_n) \rightarrow 0$

c) ξ_n and η_n are independent for every n

then the sequences ξ_n and η_n converge to 0 uniformly.

The proof of this statement can be accomplished word by word in the same way in which the assertion in I. of this §. was proved.

We summarize the preceedings in the following table:

conclusion condition		u'	p'	m'	w'
u	w'	+	+	+	+
u	s'	+	+	+	+
p	m'	—	—	+	+
p	s'	—	—	—	—
m	w'	—	—	+	+
m	s'	—	—	+	+

In the above table the signes + and — are written according as the statement on the head of a column follows or not from the statement at the left hand side of the row and the letters have the following meaning :

- $u)$ $\xi_n = \xi_n + \eta_n$ converges to 0 uniformly
- $p)$ ξ_n converges to 0 with probability 1
- $m)$ ξ_n converges to 0 in the mean
- $u')$ ξ_n and η_n converge to 0 uniformly
- $p')$ ξ_n and η_n converge to 0 with probability 1
- $m')$ ξ_n and η_n converge to 0 in the mean
- $w')$ ξ_n and η_n converge to 0 weakly
- $s')$ ξ_n and η_n converge to 0 stochastically.

(Received : 20. III. 1957.)

REFERENCES

- [1] PRÉKOPA, A.: „On the convergence of series of independent random variables”. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* 4 (1956) 410—417.
- [2] DOOB, J. L.: *Stochastic processes*. Wiley, New-York, 1953.

VALÓSZÍNŰSÉGI VÁLTOZÓK SOROZATÁNAK KONVERGENCIÁJÁRÓL (MEGJEGYZÉS PRÉKOPA A. EGY PROBLÉMÁJÁHOZ)

RÉVÉSZ PÁL

Kivonat

Legyen $\{\xi_n\}$ és $\{\eta_n\}$ két, valószínűségi változókból álló sorozat, és jelölje ζ_n a $\xi_n + \eta_n$ összeget. Tegyük fel, hogy ξ_n és η_n minden n -re függetlenek. A dolgozatban megvizsgáljuk a következő feltételek egymáshoz való viszonyát :

$u)$ minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik oly $n_0(\varepsilon)$, hogy $\mathbf{P}\{|\zeta_n| < \varepsilon\} = 1$, ha $n \geq n_0$, azaz ζ_n egyenletesen tart 0-hoz

$$p) \mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 0\} = 1$$

$$m) \mathbf{M}(\zeta_n^2) \rightarrow 0$$

$u')$ ξ_n és η_n egyenletesen tart 0-hoz

$$p') \mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0\} = \mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0\} = 1$$

$$m') \mathbf{M}(\xi_n^2) \rightarrow 0, \mathbf{M}(\eta_n^2) \rightarrow 0$$

$w')$ $\mathbf{M}(\xi_n \zeta) \rightarrow 0, \mathbf{M}(\eta_n \zeta) \rightarrow 0$ tetszőleges véges szórású ζ valószínűségi változóra

$s')$ ξ_n és η_n sztochasztikusan 0-hoz tart.

A dolgozat eredményeit a mellékelt táblázat szemlélteti, ahol a $+$, illetve $-$ jel azt jelenti, hogy az illető sor fejlécében szereplő feltételekből következik, illetve nem következik az illető oszlop fejlécében szereplő állítás.

О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СОСТОЯЩИХ ИЗ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

P. RÉVÉSZ

Резюме

Пусть $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ — две последовательности, состоящие из случайных величин, и пусть ζ_n обозначает сумму $\xi_n + \eta_n$. Предположим, что ξ_n и η_n независимы при всех значениях от n . В работе исследуется связь следующих условий:

$u)$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0(\varepsilon)$, что $\mathbf{P}\{|\zeta_n| < \varepsilon\} = 1$, если $n \geq n_0$, т. е. ζ_n равномерно стремится к нулю.

$$p) \mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = 0\} = 1$$

$$m) \mathbf{M}\{\zeta_n^2\} \rightarrow 0$$

$u')$ ξ_n и η_n равномерно стремятся к нулю.

$$p') \mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0\} = \mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0\} = 1$$

$$m') \mathbf{M}\{\xi_n^2\} \rightarrow 0, \mathbf{M}\{\eta_n^2\} \rightarrow 0$$

$w')$ $\mathbf{M}\{\xi_n \zeta\} \rightarrow 0, \mathbf{M}\{\eta_n \zeta\} \rightarrow 0$ для любой случайной величины с конечной дисперсией.

$s')$ ξ_n и η_n стохастически стремятся к нулю.

Результаты статьи находятся в приложенной таблице, где знаки $+$ или $-$ означают, что из условий фигурирующих в винетке одной строки следует предложение или нет фигурирующих в винетке соответствующего столбца.

GENERALIZED HYPERGEOMETRIC DISTRIBUTIONS

KÁROLY SARKADI

1. §. Introduction

The Pólya distribution is treated in several textbooks on probability theory and mathematical statistics (see e.g. M. FRÉCHET [4], W. FELLER [2] and M. A. BRICAS [1]). It is well-known that it contains the hypergeometric distribution as a special case. In addition it is known that the generating function of the Pólya distribution is the hypergeometric function multiplied by a constant factor. (See e.g. CH. JORDAN [9], [10], M. FRÉCHET [4] and M. A. BRICAS [1]). For this reason the Pólya distribution is called by BRICAS "generalized hypergeometric distribution." Furthermore the formula of the distribution is given by CH. JORDAN [10] in a form similar to that of the usual hypergeometric distribution, as well as the formula of the generalized hypergeometric distribution of C. D. and A. W. KEMP [12].

In the following we shall see that the generalization made by C. D. and A. W. KEMP is wider: their generalized hypergeometric distribution contains the Pólya distribution as a particular case. The special form by J. G. SKELLAM and J. O. IRWIN are Pólya distributions too.

Some other cases of the distribution treated by C. D. and A. W. KEMP were previously described by CH. JORDAN [10], [11].

The model given by J. O. IRWIN is a case of the Pólya urn-model. It is shown that Pólya's model, resp. its modification for the inverse sampling is appropriate for all cases of the generalized hypergeometric distribution with exception of cases in which both a and n are non-integral. (See formula (2))

Furthermore, it is shown that the generalization of C. D. and A. W. KEMP is incomplete. It excludes for example cases in which $P(0) = 0$, that is, zero does not belong to the possible values of the distribution. So it does not contain even all cases of the usual hypergeometric distribution. It will be shown however that the distributions thus omitted differ from the treated ones by shifting only.

Other rediscoveries of the Pólya distribution are also mentioned.

2. §. Comparison of the distributions

The usual form of the Pólya distribution is as follows (see W. FELLER [3], M. A. BRICAS [1]):

$$(1) \quad P(r) = \binom{m}{r} \frac{p(p+\gamma) \dots (p+r\gamma-\gamma) q(q+\gamma) \dots (q+m\gamma-r\gamma-\gamma)}{1 \cdot (1+\gamma) (1+2\gamma) \dots (1+m\gamma-\gamma)}$$

$$(r=0, 1, 2, \dots, m)$$

while $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $\gamma > -1$, m positive integer.

Excluding the case of the binomial distribution ($\gamma = 0$) and taking $a = -p/\gamma$, $b = -q/\gamma$ we obtain the form (see CH. JORDAN [10])

$$(2) \quad P(r) = \frac{\binom{a}{r} \binom{b}{n-r}}{\binom{a+b}{n}}$$

$$(r=0, 1, 2, \dots, n)$$

where the following relations must hold: a and b are real numbers of the same sign, n is a positive integer, for positive a and b $n < a+b$; for positive, non-integer a resp. b $n < a+1$ resp. $n < b+1$.

Thus it can be seen that the Pólya distribution is characterized by the formula of the hypergeometric distribution, permitting non-integral values for a and b .

This formula is the starting-point of C. D. and A. W. KEMP. In their generalization, also the third parameter, n may be an arbitrary real number and a, b may have different signs.

(For interpreting the ratio of factorials of negative integers they define

$$(3) \quad \frac{(-x)!}{(-x-y)!} = (-1)^y \frac{(x+y-1)!}{(x-1)!}$$

for positive integer values of x and y .)

So the Pólya distribution is a special case of the generalized hypergeometric distribution of C. D. and A. W. KEMP.

Investigating the classification of the hypergeometric distribution given by C. D. and A. W. KEMP it can be seen, that Pólya distributions result in following cases:

Type I. A(i)

Type I. A(ii) for integer n only

Type II. A.

Additional types can be regarded as Pólya distributions if we change the parameters.

The substitution

$$(4) \quad a_1 = n, \quad n_1 = a, \quad b_1 = a + b - n$$

interchanges Type I. A (i) with Type I. A (ii); Type II. A with Type III. A; Type II. B with Type III. B; the types non-mentioned are unaltered.

So we see that all cases of Types I. A., II. A., III. A can be regarded as Pólya distributions.

The comparison of the restrictions shows however that there are several cases of Pólya distributions not contained in any of the types of C. D. and A. W. KEMP. We shall return to this question in § 7. extending the class of generalized hypergeometric distributions with additional types, including thus the whole class of Pólya distributions.

3. §. Formulae of the distribution

The formula of the distribution can be written in several different forms. The formulae given by C. D. and A. W. KEMP differ from well-known forms of the Pólya distribution. There are various forms given by other authors, mentioned in §. 5. Yet there can be given additional forms.

Separate formulae are given below for each type. These formulae are equivalent, each of them providing the complete generalization with exception of (1), (6), (7), (8); the use of negative factorials being inconvenient, they can be suitably used for one type only.

C. D. and A. W. KEMP classify the generalized hypergeometric distributions into four general types. In fact there are three different types only, since — as mentioned before — Type II and III are identical by substitution (4).

Type I.

The formula given by C. D. and A. W. KEMP :

$$(5) \quad P(r) = \frac{\binom{a}{r} \binom{b}{n-r}}{\binom{a+b}{n}} = \frac{\binom{n}{r} \binom{a+b-n}{a-r}}{\binom{a+b}{a}} =$$

$$= \frac{a! n! b! (a+b-n)!}{r! (a-r)! (n-r)! (b-n+r)! (a+b)!}.$$

In case of integral n (or a) also formula (1) can be used. In formula (1) $p = a/(a+b)$, $q = b/(a+b)$, $\gamma = -1/(a+b)$, $m = n$ or $p = n/(a+b)$, $q = (a+b-n)/(a+b)$, $\gamma = -1/(a+b)$, $m = a$.

If in addition a and b (resp. n and b) are rational, the well-known formula of the Pólya urn-model is also appropriate :

$$(6) \quad P(r) = \binom{m}{r} \frac{\prod_{i=0}^{r-1} (M+iR) \prod_{i=0}^{m-r-1} (N-M+iR)}{\prod_{i=0}^{m-1} (N+iR)}$$

while $m = n$, $M = -Ra$, $N = -R(a+b)$ (resp. $m = a$, $M = -Rn$, $N = -R(a+b)$), R is a negative-integer, $-R$ being the common denominator of a , n and b .

Type II—III.

Using the relation (3) we obtain the following forms :

$$P(r) = \frac{\binom{c+r-1}{r} \binom{d+m-r-1}{m-r}}{\binom{c+d+m-1}{m}} =$$

$$= \frac{(c+r-1)! (d+m-r-1)! m! (c+d-1)!}{r! (m-r)! (c-1)! (d-1)! (c+d+m-1)!}$$

which can be written in a form given by E. J. GUMBEL and H. VON SCHELLING [5] for the distribution of the number of exceedances (see §. 5.) :

$$P(r) = \frac{\binom{N}{c} c \binom{m}{r}}{(m+N) \binom{m+N-1}{c+r-1}}$$

or in a form in which the succession law is given (see §. 5. and J. V. USPENSKY [15]) :

$$P(r) = \binom{m}{r} \frac{\int_0^1 z^{c+r-1} (1-z)^{m+N-c-r} dz}{\int_0^1 z^{c-1} (1-z)^{N-c} dz}.$$

In above formulas $c = -a$, $d = -b$, $m = n$, $N = c + d - 1$ (Type II) ; or $c = -n$, $d = -a - b + n$, $m = a$, $N = c + d - 1$ (Type III).

Altering the notations :

$$P(r) = \frac{\binom{c}{m} \binom{d}{r} m}{\binom{c+d}{m+r} (m+r)} = \frac{c! d! (m+r-1)! (c+d-m-r)!}{r! (d-r)! (c-m)! (m-1)! (c+d)!}$$

where $c = -a - b - 1$, $d = n$, $m = -a$ (Type II) ; or $c = -a - b - 1$, $d = a$, $m = -n$ (Type III).

In case of positive integral n (or a) formula (1) is also appropriate (see case of Type I). Are in addition the other two parameters rational, (6) is also suitable. Now R is a positive integer.

Are n and a both integers, following formula is also appropriate :

$$(7) \quad P(r) = \binom{m+r-1}{r} \frac{\prod_{i=0}^{m-1} (p+i\gamma) \prod_{i=0}^{r-1} (q+i\gamma)}{\prod_{i=0}^{m+r-1} (1+i\gamma)}$$

while $m = -a$, $p = (a+b+1)/(a+b-n+1)$, $q = -n/(a+b-n+1)$, $\gamma = 1/(a+b-n+1)$, (Type II. A); or $m = -n$, $p = (a+b+1)/(b+1)$, $q = -a/(b+1)$, $\gamma = 1/(b+1)$ (Type III. A).

Is in addition b rational, following formula is also suitable :

$$(8) \quad P(r) = \binom{m+r-1}{r} \frac{\prod_{i=0}^{m-1} (M+iR) \prod_{i=0}^{r-1} (N-M+iR)}{\prod_{i=0}^{m+r-1} (N+iR)}$$

where $m = -a$, $M = R(a+b+1)$, $N = R(a+b-n+1)$; (Type II. A), or $m = -n$, $M = R(a+b+1)$, $N = R(b+1)$ (Type III. A); in both cases R is a negative integer, $-R$ being the denominator of $-b$.

Type IV.

Appropriate formulae :

$$\begin{aligned} P(r) &= \frac{(c+r-1)! (m+r-1)! d! (d-c+m)!}{r! (d+m+r)! (c-1)! (m-1)! (d-c)!} = \\ &= \frac{m \binom{c+r-1}{r} \binom{d+c-m}{m}}{(d+m+r) \binom{d+m+r-1}{d}} = \\ &= \frac{c \binom{m+r-1}{r} \binom{d}{c}}{(d+m+r) \binom{d+m+r-1}{d+m-c}} \end{aligned}$$

where $c = -a$, $d = b$, $m = -n$ or $c = -n$, $d = a+b-n$, $m = -a$; further

$$\begin{aligned} P(r) &= \frac{\binom{c+m-1}{m} \binom{d+r-1}{r} m}{\binom{c+d+m+r-1}{m+r} (m+r)} \\ &= \frac{(d+r-1)! (m+r-1)! (c+d-1)! (c+m-1)!}{r! (c+d+m+r-1)! (c-1)! (d-1)! (m-1)!} \end{aligned}$$

where $c = a + b + 1$, $d = -n$, $m = -a$, or $c = a + b + 1$, $d = -a$, $m = -n$.

In the case of integral a (or n) formula (7) is also appropriate. Are in addition the other two parameters rational, formula (8) is also suitable. In this case R is always a positive integer.

4. §. Model representation

The urn-model mentioned by the authors for the integer case of Type II. A, given by J. O. IRWIN [7], is a special case of the well-known Pólya urn-model. However, Pólya's model is appropriate not only for the integral cases, but for all cases of the Pólya distribution (see e.g. W. FELLER [3], pp. 82—83., p. 128.).

The Pólya urn-model is given below in a form connected with formula (2).

In a set of n successive (dependent) trials the probability of success varies from trial to trial in the following way: In the first trial the probability of success is $a/(a+b)$. If the first k trials resulted in s successes and $k-s$ failures, the (conditional) probability of success in the $(k+1)$ -st trial is $(a-s)/(a+b-k)$. Then the probability of exactly r successes out of n trials is given by formula (2).

The above model illustrates that Pólya's distribution is the generalization of the hypergeometric one in the sense that the parameters a and b may take any real value instead of integers only.

If we modify Pólya's model for the inverse sampling, we get appropriate models for types III. A and IV. in case of integral n , for types II. A and IV. in case of integral a . The modified model is as follows:

In a set of successive trials, the probability of success varies from trial to trial in the following way. In the first trial the probability of success is p . If the first k trials resulted in s successes and $k-s$ failures, the (conditional) probability of success in the $(k+1)$ -st trial is $(p+s\gamma)/(1+k\gamma)$. The trials are continued until m successes have been obtained (r is now the number of failures). This model leads directly to formula (7).

Are the other parameters rational, the above model can be modified for urn model in a proper sense which leads to formula (8). So we have appropriate models for all cases in which n or a is integral. Are both n and a integral, we have two different models in general.

5. §. Other derivations and special cases

C. D. and A. W. KEMP mention two authors (J. G. SKELLAM [18]; J. O. IRWIN [7]) who described some types of their distribution previously. These types belong to the class of Pólya distributions. It follows from the paper of C. D. and A. W. KEMP and from our last § that the main types of the generalized hypergeometric distributions can be derived in three different ways: 1. by extending the formula of the hypergeometric distribution; 2. by urn models; 3. by allowing the probability parameter of a binomial (negative binomial) distribution to be a Beta variable.

As it is well-known, the Pólya distribution was introduced in the second way. It is known however, that it can be derived in the third way too

(O. LUNDBERG [14]). Applications of this kind are treated in papers of J. W. HOPKINS [6] and the present author [16] too. I myself ignored at that time that the distribution investigated was of type Pólya. J. W. HOPKINS uses the name "negative hypergeometric distribution" for the distribution adopted from SKELLAM.

CH. JORDAN [10] describes a simple form of the inverse sampling types, namely the case $m = 1$ (see formula (8)).

It seems that the fact that there are three possible derivations of the distribution, is the main cause for its repeated rediscovery. Another cause is that different forms of the law of distribution are possible.

Finally we wish to discuss several problems each of which leads to a special case of the Pólya distribution, namely to the integer case of C. D. and A. W. KEMP II. A (III. A.) type. As mentioned before this type has two different urn-model representations: a direct Pólya sampling model, in which a similar ball is added after each drawing and an inverse sampling model without replacement. It seems to be suitable to restrict the name „negative hypergeometric distribution" to this type, as this is the analogon of the negative binomial distribution for sampling without replacement.

The inverse sampling without replacement appears in several statistical problems: e.g. random walk (W. FELLER [2]), waiting time (W. FELLER [3] pp. 35—37.) etc.

A problem of another kind, which leads to this distribution is that of the number of exceedances. (See e.g. E. J. GUMBEL and H. von SCHELLING [5]). It has been shown by the present author [17], that the distribution of the number of exceedances is of this type. Furthermore it is mentioned that the formula of the distribution derived by E. J. GUMBEL and H. von SCHELLING by combining the binomial and Beta distributions can be derived through the Pólya urnmodel too; and it is shown that Laplace's law of succession (see e.g. J. V. USPENSKY [19]) and the inverse problem (by using Bayes' rule) of sampling without replacement lead to the same distribution.

The moments of Pólya's distribution were treated e.g. by CH. JORDAN [10], M. FRÉCHET [4] and M. A. BRICAS [1], the limiting forms by M. A. BRICAS [1] in detail. I. KOZNIEWSKA [13] determined the first absolute central moment.

6. §. The equivalency of the drawings

As well-known, a random variable of binomial probability distribution can be regarded as the sum of independent, equally distributed random variables with the possible values 0 and 1. Similarly, *a random variable of Pólya distribution can be regarded as the sum of the characteristic random variables of the drawings*. Here however the terms are dependent, but it is known that these characteristic variables have the same apriori distribution. G. PÓLYA [15] showed that they are *equivalent random variables* (see also CH. JORDAN [11], M. FRÉCHET [4]).

The converse of the above theorem does not hold. L. WEISS [20] showed by a counter-example that Pólya's distribution cannot be uniquely derived from the assumption of its variable being the sum of equally distributed random variables on the numbers 0 and 1, having by pairs the same correlation coefficient. Furthermore it follows from his counter-example that even the

assumption of equivalency of the terms is insufficient for being the sum Pólya variable.

Here we show the following

Theorem: Every random variable ξ with the possible values $0, 1, 2, \dots, n$ can be written as the sum of n equivalent random variables:

$$\xi = \zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n$$

while each of the equivalent random variables $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ is distributed on the numbers 0 and 1. This decomposition of ξ is uniquely determined.

Proof:

It follows from the assumption that if such a decomposition exists, then the probability that k of the variables $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ in a given order have value 1 and the remaining $n - k$ value 0, is

$$(9) \quad \frac{P(\xi = k)}{\binom{n}{k}}$$

since there are $\binom{n}{k}$ orders of this kind, each order with the same probability by virtue of equivalency.

The joint distribution of $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ is uniquely determined by the formula (9). Evidently, any permutation of the variables does not effect the distribution. Thus it follows that $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ are equivalent random variables.

7. §. Completion of the generalization

The generalization given by C. D. and A. W. KEMP is — as mentioned before — incomplete. There are cases in which formula (2) defines a probability distribution, but does not satisfy the restrictions given by C. D. and A. W. KEMP. The classification needs a completion in two directions:

A) C. D. and A. W. KEMP consider cases only in which the smallest possible value of the distribution is zero. In addition, it seems reasonable to consider cases in which $n - b$ is a positive integer and formula (5) gives $P(r) > 0$ in the range $n - b \leq r \leq R$ (R positive integer or infinite) and formula (5) sums to unity in this range.

The reason for above assumption is that in each case for which formula (5) gives $P(0) = 0$ but gives positive values for some positive integral values of r , $n - b$ must be a positive integer and $P(n - b) \neq 0$ but $P(r) = 0$ if $0 < r < n - b$.

Namely we obtain from (5)

$$\frac{P(0)}{P(r)} = r! \frac{(a-r)!}{a!} \cdot \frac{(b-r)!}{b!} \cdot \frac{(b-n+r)!}{(b-n)!}.$$

The first three factors are always finite and different from 0. Thus $P(0)/P(r) = 0$ if and only if

$$\frac{(b - n + r)!}{(b - n)!} = 0$$

from which follows that $b - n$ must be a negative integer and $r \geq n - b$.

It will be shown that the probability distribution arising from (5) and having the smallest possible value $n - b$, can be reduced by the transformation

$$(10) \quad a = b_1, \quad b = a_1, \quad n = a_1 + b_1 - n_1, \quad r = b_1 - n_1 + r_1$$

to those considered above. Namely,

$$P_1(r_1) = P(r) = \frac{\binom{a_1}{r_1} \binom{b_1}{n_1 - r_1}}{\binom{a_1 + b_1}{n_1}}$$

while

$$P_1(0) = P(n - b) > 0.$$

The detailed comparison gives that we get new types by the transformation (10) from Types I. A (i), I. A (ii) and IV. of C. D. and A. W. KEMP.

B) For Type II. A. the authors exclude the case $b = -1$, similarly for Type III. A. the case $b = n - a - 1$. These exclusions are unjustified. It is true that in the cases mentioned the hypergeometric series are infinite and divergent, but n or a is a positive integer and thus (5) sums to unity in the range $0 \leq r \leq n$ resp. $0 \leq r \leq a$ which can be proved in the same way as in case of finite series.

An important particular case: If $a = b = -1$, n positive integer, we obtain

$$P(r) = \frac{1}{n+1}$$

$$(r = 0, 1, \dots, n)$$

that is our random variable is uniformly distributed on the numbers 0, 1, 2, ..., n .

(Received: 5. VIII. 1957.)

REFERENCES

- [1] BRICAS, M. A.: *Le système de courbes de Pearson et le schéma d'urne de Pólya*. Cristou, Athènes, 1949.
- [2] FELLER, W.: „On the Kolmogorov—Smirnov limit theorems for empirical distributions.” *Annals of Mathematical Statistics* **19** (1948) 177—189.
- [3] FELLER, W.: *An introduction to probability theory and its applications*. Wiley, New York, 1950.
- [4] FRÉCHET, M.: *Les probabilités associées à un système d'événement compatibles et dépendants*. Herman, Paris, 1943.
- [5] GUMBEL, E. J.—VON SCHELLING, H.: „The distribution of the number of exceedances”. *Annals of Mathematical Statistics* **21** (1950) 247—262.
- [6] HOPKINS, J. W.: „An instance of negative hypergeometric sampling in practice.” *Bulletin de l'Institut International de Statistique*, **34** (1955) 298—306.
- [7] IRWIN, J. O.: „A distribution arising in the study of infectious diseases”. *Biometrika* **41** (1954) 266—268.
- [8] JEFFREYS, H.: *Theory of probability*. Oxford University Press, Oxford, 1948. (2nd edition).
- [9] JORDAN, CH.: „Sur un cas généralisé de la probabilité des épreuves répétées”. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (Paris)* **184** (1927) 315—317.
- [10] JORDAN, CH.: „Sur un cas généralisé de la probabilité des épreuves répétées”. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **3** (1927) 193—210.
- [11] JORDAN, CH.: „Problèmes de la probabilité des épreuves répétées dans le cas général”. *Bulletin de la Société Mathématique de France* **67** (1940) 223—242.
- [12] KEMP, C. D.—KEMP, A. W.: „Generalized hypergeometric distributions”. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B.* **18** (1956) 202—211.
- [13] KOZNIĘWSKA, I.: „The first absolute central moment for Pólya's distributions.” *Zastosowania Matematyki (Warszawa)* **1** (1954) 207—211.
- [14] LUNDBERG, O.: *On random processes and their application to sickness and accident statistics*. Almqvist and Wiksells, Uppsala, 1940.
- [15] PÓLYA, G.: „Sur quelques points de la théorie des probabilités.” *Annales de l'Institut Henri Poincaré* **1** (1930) 117—161.
- [16] SARKADI, K.: „On the a priori beta distribution of fraction defective.” *A Magyar Tudományok Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1954) 287—293.
- [17] SARKADI, K.: „On the distribution of the number of exceedances.” *Annals of Mathematical Statistics* **28** (1957) 1021—1023.
- [18] SKELLAM, J. G.: „A probability distribution derived from the binomial distribution by regarding the probability of success as variable between the sets of trials.” *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B.* **10** (1948) 257—261.
- [19] USPENSKY, J. V.: *Introduction to mathematical probability*. McGraw-Hill, New York, 1937.
- [20] WEISS, L.: Review of J. O. Irwin's paper (see [7]). *Mathematical Reviews* **15** (1954) 884.

A HIPERGEOMETRIKUS ELOSZLÁS ÁLTALÁNOSÍTÁSA

SARKADI K.

Kivonat

C. D. and A. W. KEMP [12] a hipergeometrikus eloszlás képletéből (2) kiindulva általánosították az eloszlást arra az esetre, ha a paraméterek nem egész, hanem általában valós számok.

Ebben a cikkben a szerző megmutatja, hogy a C. D. és A. W. KEMP-féle általánosítás a Pólya-féle eloszlást speciális esetenként tartalmazza, továbbá ugyancsak tartalmazza a Pólya-modell inverz (Pascal-féle) megfelelője által származtatott eloszlásokat.

Az említett cikk részletes tárgyalását is több tekintetben kiegészíti, így pl. megmutatja, hogy az indokolatlanul kizár egyes olyan típusokat, amelyek az eredeti feltevésnek megfelelnek.

Megemlíti még a szerző a cikkben több ismert vagy az irodalomban tárgyalt eloszlást is, melyekről eddig nem volt ismeretes, hogy Pólya-eloszlások. Ezek: a Laplace-féle következési szabály, továbbá a visszatevéses mintavétel (Bayes-féle) inverz problémájának megoldása, valamint az [5], [6], [7], [16], [18] cikkekben tárgyalt eloszlások.

J. O. IRWIN [7] cikke kritikáját (lásd: [20]) kiegészítve, a szerző bebizonyítja, hogy bármely valószínűségi változó, amelynek $0, 1, 2, \dots, n$ a lehetséges értékei, felírható n darab ekvivalens esemény karakterisztikus változónak összegeként.

ОБОБЩЕННЫЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

K. SARKADI

Резюме

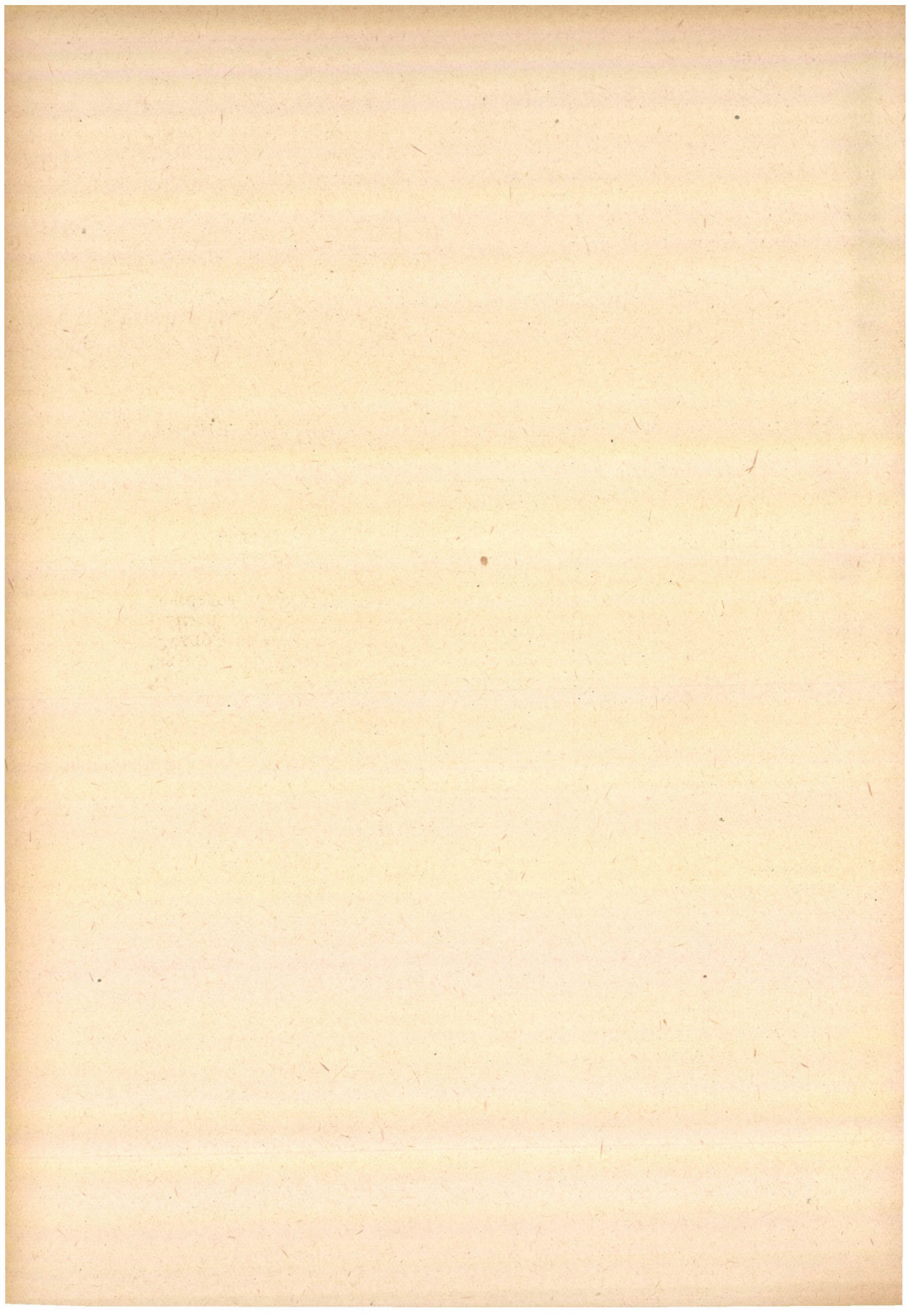
C. D. и A. W. КЕМП [12], исходя из формулы гипергеометрического распределения (2), обобщили распределение на тот случай, когда параметры не целые, а, вообще говоря, вещественные числа.

В настоящей статье автор показывает, что это обобщение содержит распределение РÓЛҮА как специальный случай, а также содержит распределения, происходящие от обратного (PASCAL) аналога модели РÓЛҮА.

Дополняется также подробные рассуждения упомянутой статьи, показывается, например, что она необоснованно исключает некоторые типы, которые соответствуют исходным предположениям.

Упоминаются ещё в статье известные или рассмотренные в литературе распределения, о которых не было известно, что они являются распределениями РÓЛҮА. Это: правило заключения LAPLACE, решение обратной проблемы выбора образцов с возражением, а также распределения, рассматриваемые в статье [5], [6], [7], [16], [18].

Дополняя критику [20] статьи J. O. IRWIN [7], автор доказает, что любая случайная величина, возможные значения которой являются $0, 1, 2, \dots, n$, может быть представлена в виде суммы характеристических переменных n эквивалентных событий.



ON SECONDARY STOCHASTIC PROCESSES GENERATED BY A MULTIDIMENSIONAL POISSON PROCESS¹⁾

LAJOS TAKÁCS

Introduction

In an earlier paper [4] the author deduced some theorems concerning secondary stochastic processes generated by a one-dimensional Poisson process. In the present paper a more general case will be investigated. We suppose that the underlying process is a homogeneous Poisson process defined on an m -dimensional space. We shall establish theorems which are generalizations of the theorems formulated in [4]. The proofs are based on the method of [4].

§. 1. Homogeneous Poisson process defined on a Euclidean space of finite dimension

Let us consider the field \mathfrak{S} of all Borel-measurable sets S of a Euclidean space of finite dimension. Denote by $\mu(S)$ the Lebesgue measure defined on the sets $S \in \mathfrak{S}$. For each set S , with $\mu(S) < \infty$, let there be defined a random variable $\xi(S)$ with the following properties:

1° $\xi(S)$ assumes only non-negative integer values and $\mathbf{P}\{\xi(S) = 0\} \neq 1$ if $\mu(S) > 0$.

2° The probability distribution of $\xi(S)$ depends only on the measure $\mu(S)$.

3° If S_1 and S_2 are disjoint sets, then $\xi(S_1)$ and $\xi(S_2)$ are independent random variables and we have $\xi(S_1 + S_2) = \xi(S_1) + \xi(S_2)$.

$$4^\circ \lim_{\mu(S) \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}\{\xi(S) \geq 1\}}{\mathbf{P}\{\xi(S) = 1\}} = 1.$$

Another definition of the multidimensional Poisson process has been given e.g. by C. RYLL-NARDZEWSKI [3].

Theorem 1.: Under the assumptions 1° — 4° we have

$$(1) \quad \mathbf{P}\{\xi(S) = k\} = e^{-p\mu(S)} \frac{[p\mu(S)]^k}{k!}$$

¹⁾ This is an address delivered at the Colloquium on Stochastic Processes, Balatonvilágos, September 13—15, 1956.

for all $S \in \mathfrak{S}$, with $\mu(s) < \infty$, where p is a positive constant.

Proof: Consider a decomposition of S :

$$S = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + \dots + S_n^{(n)}$$

where $S_n^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) are disjoint sets and $\mu(S_n^{(i)}) = \mu(S)/n$. Let S_n be one of the sets $S_n^{(i)}$. Now, by 3° we have

$$(2) \quad \mathbf{P}\{\xi(S) = 0\} = [\mathbf{P}\{\xi(S_n) = 0\}]^n$$

without supposing the mutual independence of the random variables $\xi(S_n^{(i)})$ ($i = 1, 2, \dots, n$). As $\mathbf{P}\{\xi(S_n) = 0\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi(S_n) = 1\} - \mathbf{P}\{\xi(S_n) > 1\}$ and $\mu(S_n) = \mu(S)/n$, taking 4° into consideration, we obtain that

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbf{P}\{\xi(S_n) = 1\} = -\log \mathbf{P}\{\xi(S) = 0\}.$$

This limit cannot be infinite. For $\mathbf{P}\{\xi(S) = 0\} = 0$ would imply $\mathbf{P}\{\xi(S) = 0\} = 0$ for all sets S . Consequently also it would follow that $\mathbf{P}\{\xi(S) = k\} = 0$ for all sets S and for all k , which is impossible. The limit cannot be equal to 0, for $\mathbf{P}\{\xi(S) = 0\} = 1$ would imply the same relation for all sets S . But the case $\mathbf{P}\{\xi(S) = 0\} = 1$ is excluded.

Using the condition 3°, we have

$$(4) \quad \mathbf{M}\{e^{it\xi(S)}\} = [\mathbf{M}\{e^{it\xi(S_n)}\}]^n.$$

Clearly, we have

$$\mathbf{M}\{e^{it\xi(S_n)}\} = \mathbf{P}\{\xi(S_n) = 0\} + \mathbf{P}\{\xi(S_n) = 1\}e^{it} + \mathbf{P}\{\xi(S_n) > 1\}\vartheta$$

where $|\vartheta| \leq 1$. Now putting $\mathbf{P}\{\xi(S_n) = 0\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi(S_n) = 1\} - \mathbf{P}\{\xi(S_n) > 1\}$, from (4) it results that

$$(5) \quad \mathbf{M}\{e^{it\xi(S)}\} = \exp\{(e^{it} - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbf{P}\{\xi(S_n) = 1\}\}$$

or by virtue of (3),

$$(6) \quad \mathbf{M}\{e^{it\xi(S)}\} = (\mathbf{P}\{\xi(S) = 0\})^{(1-e^{it})}.$$

Consequently $\xi(S)$ has a Poisson distribution. The expectation $\mathbf{M}\{\xi(S)\}$ exists and by (6) we have

$$(7) \quad \mathbf{M}\{\xi(S)\} = -\log \mathbf{P}\{\xi(S) = 0\}.$$

The expectation $\mathbf{M}\{\xi(S)\}$ is a non-negative additive set function, which depends only on $\mu(S)$. Consequently $\mathbf{M}\{\xi(S)\} = p\mu(S)$ with a positive p . The cases $p = 0$ and $p = \infty$ are excluded. Finally

$$(8) \quad \mathbf{M}\{e^{it\xi(S)}\} = e^{-p\mu(S)(1-e^{it})}.$$

which proves (1).

In the following we shall call a set of random variables $\{\xi(S)\}$ which satisfies 1°—4° a *homogenous Poisson process*.

Remark 1. If $n > 2$ and S_1, S_2, \dots, S_n are disjoint sets, then $\xi(S_1), \xi(S_2), \dots, \xi(S_n)$ are not necessarily mutually independent random variables. However, it is easy to construct a set of random variables $\{\xi(S)\}$ which satisfies beside 1°—4° also the following condition:

5°. If for an arbitrary n , S_1, S_2, \dots, S_n are disjoint sets then the random variables $\xi(S_1), \xi(S_2), \dots, \xi(S_n)$ are mutually independent.

The stochastic process $\{\xi(S)\}$ can be interpreted as follows: Let us consider random points (random events) distributed in the space. Denote by $\xi(S)$ the number of the random points or random events taking place in the set S . For a realization $\{\xi(S)\}$ a point P is one of the random points if $\lim_{S \rightarrow P} \xi(S) \geq 1$ in such a way that $P \in S$, where S is an open set.

We prove two lemmas:

Lemma 1. Let us consider the Poisson process $\{\xi(S)\}$ fulfilling 1°—4°. Let $\mu(S) > 0$. Under the condition $\xi(S) = 1$ the random point in S is distributed uniformly in S .

Proof: Let $S = S_1 + S_2$, where S_1 and S_2 are disjoint sets. Then we have

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi(S_1) = 1 | \xi(S) = 1\} &= \frac{\mathbf{P}\{\xi(S_1) = 1, \xi(S_2) = 0\}}{\mathbf{P}\{\xi(S) = 1\}} = \\ &= \frac{\mathbf{P}\{\xi(S_1) = 1\} \mathbf{P}\{\xi(S_2) = 0\}}{\mathbf{P}\{\xi(S) = 1\}} = \frac{\mu(S_1)}{\mu(S)}, \end{aligned}$$

as was to be proved.

Lemma 2. Let us consider a Poisson process $\{\xi(S)\}$ fulfilling 1°—5°. Let $\mu(S) > 0$. Under the condition $\xi(S) = k$, the k random points in S are distributed independently and uniformly in S .

Proof: For an arbitrary n , let $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ where S_1, S_2, \dots, S_n are any disjoint sets and $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ where k_1, k_2, \dots, k_n are any non-negative integers. Then we have

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\xi(S_1) = k_1, \xi(S_2) = k_2, \dots, \xi(S_n) = k_n | \xi(S) = k\} &= \\ &= \frac{\mathbf{P}\{\xi(S_1) = k_1, \xi(S_2) = k_2, \dots, \xi(S_n) = k_n\}}{\mathbf{P}\{\xi(S) = k\}} = \\ &= \frac{\mathbf{P}\{\xi(S_1) = k_1\} \cdot \mathbf{P}\{\xi(S_2) = k_2\} \dots \mathbf{P}\{\xi(S_n) = k_n\}}{\mathbf{P}\{\xi(S) = k\}} = \\ &= \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left(\frac{\mu(S_1)}{\mu(S)} \right)^{k_1} \left(\frac{\mu(S_2)}{\mu(S)} \right)^{k_2} \dots \left(\frac{\mu(S_n)}{\mu(S)} \right)^{k_n}. \end{aligned}$$

This completes the proof.

Remark 2. If we assume more generally that $\mu(S)$ is any non-atomic measure other than the Lebesgue one, then similar theorems are valid as above. In this case $\{\xi(S)\}$ is called a *non-homogeneous Poisson process*.

§. 2. Secondary stochastic processes generated by a Poisson process

Let us consider a homogeneous Poisson process $\{\xi(S)\}$ defined on the Euclidean space of m dimensions. For the sake of brevity we introduce the vector notation $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ etc., for denoting the points of the space. Let us suppose that every event in the Poisson process gives rise to a signal depending on a random parameter. If \mathbf{y} is the point representing an event and a is the value of the corresponding parameter, then denote the magnitude of this signal at the point \mathbf{x} by $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, a)$. Suppose that the parameters belonging to different events are mutually independent random variables with a common distribution function $H(a)$ and further that the different signals linearly superpose. In the following we suppose that $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, a)$ is a Baire function.

Let us consider the random variable

$$(9) \quad \eta(\mathbf{x}; S) = \sum_{\mathbf{y}_v \in S} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_v, \alpha_v)$$

which represents at the point \mathbf{x} the sum of the signals arising from the random events occurring in the set S . Here \mathbf{y}_v denote the different random points and α_v the random parameters. In the case when $S = \mathbf{R}_m$ (the whole space), let us write $\eta(\mathbf{x})$ instead of $\eta(\mathbf{x}_m; \mathbf{R}_m)$. These sums do not necessarily converge. If they do, we say that the process $\eta(\mathbf{x}; S)$ resp. $\eta(\mathbf{x})$ exists. If $\mu(S) < \infty$ then the process $\eta(\mathbf{x}; S)$ exists with probability 1. If $S = \mathbf{R}_m$ we obtain the following

Theorem 2. *If for all \mathbf{x} we have*

$$(10) \quad \int_{\mathbf{R}_m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, a)| dH(a) \right] d\mathbf{y} < \infty$$

then the process $\{\eta(\mathbf{x})\}$ exists with probability 1.

Proof: Let us decompose the space \mathbf{R}_m as the countable union of disjoint sets with finite measures: $\mathbf{R}_m = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$. Then we have

$$(11) \quad \eta(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(\mathbf{x}; S_n).$$

As

$$\mathbf{M}\{|\eta(\mathbf{x}; S_n)|\} \leq p \int_{S_n} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, a)| dH(a) \right] d\mathbf{y}$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}\{|\eta(\mathbf{x}; S_n)|\} \leq p \int_{\mathbf{R}_m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, a)| dH(a) \right] d\mathbf{y} < \infty,$$

it follows from the known theorem of BEPPO LEVI or from the known inequality of MARKOV concerning non-negative random variables that the process $\{\eta(\mathbf{x})\}$ exists with probability 1. Evidently, $\eta(\mathbf{x})$ is independent of the partition of \mathbf{R}_m .

Theorem 3. Let $\mu(S)$ be finite. The characteristic function of the random variable $\eta(\mathbf{x}; S)$ has the following form:

$$(12) \quad \mathbf{M}\{e^{it\eta(\mathbf{x}; S)}\} = \exp \left\{ p \int_S \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itf(\mathbf{x}, \mathbf{y}, a)} dH(a) - 1 \right] d\mathbf{y} \right\}.$$

Proof: Let be $S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ where S_1, S_2, \dots, S_n are disjoint sets with the same measure. According to the condition 3° concerning $\{\xi(S)\}$ we can write

$$(13) \quad \mathbf{M}\{e^{it\eta(\mathbf{x}; S)}\} = \prod_{k=1}^n \mathbf{M}\{e^{it\eta(\mathbf{x}; S_k)}\}$$

without supposing the mutual independence of the random variables $\eta(\mathbf{x}; S_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). By the theorem of total expectation and Lemma 1 we obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\{e^{it\eta(\mathbf{x}; S_k)}\} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi(S_k) = j\} \mathbf{M}\{e^{it\eta(\mathbf{x}; S_k)} | \xi(S_k) = j\} = \\ &= \mathbf{P}\{\xi(S_k) = 0\} + \mathbf{P}\{\xi(S_k) = 1\} \frac{1}{\mu(S_k)} \int_S \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itf(\mathbf{x}, \mathbf{y}, a)} dH(a) \right] d\mathbf{y} + \mathbf{P}\{\xi(S_k) > 1\} \vartheta \end{aligned}$$

where $|\vartheta| \leq 1$. Taking into consideration that $\mathbf{P}\{\xi(S_k) = 0\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi(S_k) = 1\} - \mathbf{P}\{\xi(S_k) > 1\}$ and $\mu(S_k) = \mu(S)/n$ we obtain by taking logarithms

$$\log \mathbf{M}\{e^{it\eta(\mathbf{x}; S_k)}\} = p \int_S \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itf(\mathbf{x}, \mathbf{y}, a)} dH(a) - 1 \right] d\mathbf{y} + C_k \left[\frac{p \mu(S)}{n} \right]^2,$$

where $|C_k| < 4$. Letting $n \rightarrow \infty$ we obtain by (13)

$$\log \mathbf{M}\{e^{it\eta(\mathbf{x}; S)}\} = p \int_S \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itf(\mathbf{x}, \mathbf{y}, a)} dH(a) - 1 \right] d\mathbf{y}$$

which proves (12).

Remark 3. Assuming also 5° for the process $\{\xi(S)\}$ we may prove Theorem 3 in a simpler way using Lemma 2. For by the theorem of total expectation we get

$$\mathbf{M}\{e^{it\eta(\mathbf{x}; S)}\} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\xi(S) = j\} \mathbf{M}\{e^{it\eta(\mathbf{x}; S)} | \xi(S) = j\}$$

and by Lemma 2

$$\mathbf{M}\{e^{it\eta(\mathbf{x}; S)} | \xi(S) = j\} = [\mathbf{M}\{e^{it\eta(\mathbf{x}; S)} | \xi(S) = 1\}]^j$$

where

$$\mathbf{M}\{e^{it\eta(x;S)} | \xi(S) = 1\} = \frac{1}{\mu(S)} \int_S \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itf(x,y,a)} dH(a) \right] dy.$$

Carrying out the corresponding substitutions we get (12), what was to be proved.

Now we shall prove the following limit theorem:

Theorem 4. *Let us suppose that $\mathbf{D}\{\eta(x;S)\}$ exists; then we have*

$$(14) \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\eta(x;S) - \mathbf{M}\{\eta(x;S)\}}{\mathbf{D}\{\eta(x;S)\}} \leq x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Proof: By Lemma 2

$$\eta(x;S) = \sum_{y \in S} f(x, y, \alpha_y)$$

can be considered as a sum of a random number of identically distributed independent random variables, where the number of the variables is independent of the variables themselves. The number of the variables follows a Poisson distribution with mean $p\mu(S)$. If $p \rightarrow \infty$ then we obtain the limiting distribution (14) by the theorem stated by H. ROBBINS [2] (Cf. R. L. DOBRUSHIN [1]).

Remark 4. Theorem 3 may be easily proved also for the case when the underlying process is a non-homogeneous Poisson process. In this case we have

$$\mathbf{M}\{e^{it\eta(x;S)}\} = \exp \left\{ p \int_S \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itf(x,y,a)} dH(a) - 1 \right] \mu(dy) \right\}.$$

Theorem 5. *If for all x we have (10), then*

$$(15) \quad \mathbf{M}\{e^{it\eta(x)}\} = \exp \left\{ p \int_{R_m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itf(x,y,a)} dH(a) - 1 \right] dy \right\}.$$

Proof: (15) follows from the existence of the random variable $\eta(x)$. However, we may prove it directly by the known theorem of P. LÉVY and H. CRAMÉR concerning the convergence of a sequence of characteristic functions.

Remark 5. Let us denote the s -th semi-invariant of $\eta(x)$ by $\mathbf{A}_s\{\eta(x)\}$ ($s = 1, 2, \dots$). By (15) we get

$$(16) \quad \mathbf{A}_s\{\eta(x)\} = \frac{1}{i^s} \left(\frac{d^s \log \mathbf{M}\{e^{it\eta(x)}\}}{dt^s} \right)_{t=0} = p \int_{R_m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (f(x,y,a))^s dH(a) \right] dy$$

if this exists at all. By (16) we obtained a new generalization of the formulae of N. CAMPBELL well-known in physics. Especially we have

$$\mathbf{M}\{\eta(\mathbf{x})\} = \mathbf{A}_1\{\eta(\mathbf{x})\} \text{ and } \mathbf{D}^2\{\eta(\mathbf{x})\} = \mathbf{A}_2\{\eta(\mathbf{x})\}.$$

Remark 6. Let us suppose that $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, a)$ depends only on the difference $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. In this case let us put $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, a) = g(\mathbf{r}, a)$. Then the distribution function of $\eta(\mathbf{x})$ is independent of \mathbf{x} and its characteristic function is

$$(17) \quad \mathbf{M}\{e^{it\eta(\mathbf{x})}\} = \exp \left\{ p \int_{R_m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{itg(\mathbf{r}, a)} dH(a) - 1 \right] d\mathbf{r} \right\}.$$

In such cases we shall call the process $\{\eta(\mathbf{x})\}$ a *homogeneous* one.

If further, $g(\mathbf{r}, a)$ depends only on $\mathbf{r} = |\mathbf{r}|$, then let us put $g(\mathbf{r}, a) = h(r, a)$. In this case the characteristic function of $\eta(\mathbf{x})$ is

$$(18) \quad \mathbf{M}\{e^{it\eta(\mathbf{x})}\} = \exp \left\{ \frac{p\pi^2}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{\infty} r^{m-1} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ith(r, a)} dH(a) - 1 \right] dr \right\}.$$

We shall say in this case that the process $\eta(\mathbf{x})$ is a *homogeneous* and *isotropic* one.

Theorem 6. If $\{\eta(\mathbf{x})\}$ is a homogeneous process and $\mathbf{M}\{(\eta(\mathbf{x}))^2\} < \infty$, then the correlation function $R(\mathbf{r}) = \mathbf{R}\{\eta(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x} + \mathbf{r})\}$ exists and is independent of \mathbf{x} . We have

$$(19) \quad R(\mathbf{r}) = \frac{\int_{R_m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{y}, a) g(\mathbf{y} + \mathbf{r}, a) dH(a) \right] d\mathbf{y}}{\int_{R_m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (g(\mathbf{y}, a))^2 dH(a) \right] d\mathbf{y}}.$$

Proof: Let \mathbf{r} be fixed and $\eta^*(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x} + \mathbf{r})$. Then $\{\eta^*(\mathbf{x})\}$ is also a homogeneous process and $\mathbf{M}\{(\eta^*(\mathbf{x}))^2\} < \infty$. $\{\eta^*(\mathbf{x})\}$ differs from the process $\{\eta(\mathbf{x})\}$ merely by taking the signal $g^*(\mathbf{y}, a) = g(\mathbf{y}, a) + g(\mathbf{y} + \mathbf{r}, a)$ instead of $g(\mathbf{y}, a)$. Then by (16) we have

$$\mathbf{D}^2\{\eta^*(\mathbf{x})\} = \int_{R_m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (g^*(\mathbf{y}, a))^2 dH(a) \right] d\mathbf{y}$$

i. e.

$$\mathbf{D}^2\{\eta(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x} + \mathbf{r})\} = \int_{R_m} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (g(\mathbf{y}, a) + g(\mathbf{y} + \mathbf{r}, a))^2 dH(a) \right] d\mathbf{y}.$$

On the other hand, evidently

$$\mathbf{D}^2\{\eta(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x} + \mathbf{r})\} = 2 \mathbf{D}^2\{\eta(\mathbf{x})\} [1 + R(\mathbf{r})].$$

Comparing the latter two formulae we get $R(\mathbf{r})$.

Remark 7. If $\{\eta(\mathbf{x})\}$ is a homogeneous and isotropic process, then the correlation function $R(\mathbf{r})$ depends only on $r = |\mathbf{r}|$ and in this case let us put $R(r) = R(\mathbf{r})$ for which we have

$$(20) \quad R(r) = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \int_0^\infty y^{m-1} \left\{ \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^\infty h(y, a) h(\sqrt{r^2 + y^2 - 2ry \cos \varphi}, a) dH(a) \right] |\cos \varphi|^{m-2} d\varphi \right\} dy$$

$$= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^\infty y^{m-1} \left[\int_{-\infty}^\infty (h(y, a))^2 dH(a) \right] dy$$

The spectral function of the process $\{\eta(\mathbf{x})\}$. As the correlation function of a stationary stochastic process can be expressed by the known formula of A. J. KHINTCHINE, similarly the correlation function of $\{\eta(\mathbf{x})\}$ may be expressed as follows:

$$(21) \quad R(\mathbf{r}) = \int_{R_m} e^{i\lambda \mathbf{r}} dF(\lambda)$$

where $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_m)$, $\lambda \mathbf{r} = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \dots + \lambda_m r_m$ and $F(\lambda) = F(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ is a distribution function of m dimensions.

Theorem 7. If

$$(22) \quad \Gamma(\lambda, a) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{m}{2}} \int_{R_m} e^{-i\lambda \mathbf{x}} g(\mathbf{x}, a) d\mathbf{x} ,$$

the Fourier transform of $g(\mathbf{x}, a)$ exists and $|\Gamma(\lambda, a)|^2$ is Stieltjes-integrable with respect to $H(a)$ then $F(\lambda)$ has a density function $f(\lambda)$ and we have

$$(23) \quad f(\lambda) = \frac{\int_{-\infty}^\infty |\Gamma(\lambda, a)|^2 dH(a)}{\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty (g(\mathbf{y}, a))^2 dH(a) \right] dy} .$$

Proof: $f(\lambda)$ may be determined from (21) by Fourier inversion:

$$f(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{R_m} e^{-i\lambda \mathbf{r}} R(\mathbf{r}) d\mathbf{r} .$$

Remark 8. If $\eta(x)$ is a homogeneous and isotropic process, then

$$(24) \quad R(r) = 2^{\frac{m-2}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \int_0^\infty \frac{J_{\frac{m-2}{2}}(\lambda r)}{(\lambda r)^{\frac{m-2}{2}}} dF(\lambda)$$

where $F(\lambda)$ is a distribution function of a non-negative random variable and $J_{\frac{m-2}{2}}(z)$ is the Bessel function of order $(m-2)/2$. If

$$\Gamma(\lambda, a) = \int_0^\infty \frac{r^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m-2}{2}}(\lambda r)}{\lambda^{\frac{m-2}{2}}} h(r, a) dr$$

exists and $|\Gamma(\lambda, a)|^2$ is integrable with respect to $H(a)$, then the density function $f(\lambda) = F'(\lambda)$ exists and we have

$$(25) \quad f(\lambda) = \frac{\lambda \int_{-\infty}^\infty \left[\int_0^\infty r^{\frac{m}{2}} J_{\frac{m-2}{2}}(\lambda r) h(r, a) dr \right]^2 dH(a)}{\int_0^\infty r^{m-1} \left[\int_{-\infty}^\infty (h(r, a))^2 dH(a) \right] dr}.$$

(Received : 1. IV. 1957.)

REFERENCES

- [1] ДОБРУШИН, Р. Л.: „Лемма о пределе сложной случайной функции.“ *Успехи Математических Наук* **10:2** (1955) 157—159.
- [2] ROBBINS, H.: „The asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables.“ *Bulletin of the American Mathematical Society* **54** (1948) 1151—1161.
- [3] RYLL-NARDZEWSKI, O.: „On the non homogeneous Poisson process, I.“ *Studia Mathematica* **14** (1954) 124—128.
- [4] TAKÁCS, L.: „On secondary processes generated by a Poisson process and their applications in physics.“ *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **5** (1954) 203—236.

TÖBBDIMENZIÓS POISSON-FOLYAMAT ÁLTAL SZÁRMAZTATOTT MÁSODLAGOS FOLYAMATOKRÓL

TAKÁCS LAJOS

Kivonat

Egy véges dimenziójú euklideszi tér Borel-féle S részhalmazain legyen értelmezve egy $\{\xi(S)\}$ homogén Poisson folyamat, amelyre

$$\mathbf{P}\{\xi(S) = k\} = e^{-p\mu(S)} \frac{[p\mu(S)]^k}{k!},$$

ahol $\mu(S)$ az S halmaz Lebesgue mértéke és p pozitív állandó.

A Poisson folyamat eseményei előfordulási pontjainak sokaságát jelölje $\{y_v\}$. Tegyük fel, hogy a Poisson folyamat minden egyes eseménye létrehoz egy jelet. Jelölje az y_v ponthoz tartozó jel nagyságát x pontban $f(x, y_v, \alpha_v)$, ahol α_v egy véletlen paraméter. Feltesszük, hogy az $\{\alpha_v\}$ paraméterek egyforma eloszlású független valószínűségi változók. A szerző az

$$(1) \quad \eta(x; S) = \sum_{y_v \in S} f(x, y_v, \alpha_v)$$

sztochasztikus folyamat vizsgálatával foglalkozik. Meghatározza az $\eta(x; S)$ változó eloszlását és az $\{\eta(x; S)\}$ folyamat korrelációs függvényét és spektrális eloszlását, midőn S az egész tér.

О ПРОЦЕССАХ ПОРОЖДЕННЫХ МНОГОМЕРНЫМ ПРОЦЕССАМ POISSON-A

L. TAKÁCS

Резюме

Пусть $\{\xi(S)\}$ однородный процесс Poisson-a, определенный на Borel-евских подмножествах S некоторого конечномерного евклидова пространства, и пусть

$$P\{\xi(S) = k\} = e^{-p\mu(S)} \frac{[p\mu(S)]^k}{k!}$$

где $\mu(S)$ Lebesgue-овская мера множества S и p положительное число.

Пусть $\{y_v\}$ означает множество точек *нахождения* событий процесса Poisson.

Предположим, что всякое событие процесса Poisson-a создаёт сигнал.

Пусть $f(x, y_v, \alpha_v)$ означает в точке x величину сигнала, принадлежащего точке y_v , где α_v случайный параметр. Будем предполагать, что параметры $\{\alpha_v\}$ независимые, одинаково распределённые случайные величины. Автор занимается исследованием стохастического процесса

$$\eta(x; S) = \sum_{y_v \in S} f(x, y_v, \alpha_v).$$

Определены распределение случайной величины $\eta(x; S)$, корреляционная и спектральная функции процесса $\{\eta(x; S)\}$, когда S является полным пространством.

BOLYONGÁSI FELADATOKRÓL

TAKÁCS LAJOS

A következőkben a közönséges és abszorpciós bolyongás néhány speciális problémájával foglalkozunk és korábbi ismert eredmények egyszerű bizonyítását ismertetjük.

1. §. Közönséges bolyongás

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ független valószínűségi változók, amelyekre

$$(1) \quad \mathbf{P}\{\xi_n = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_n = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Legyen $\eta_0 = 0$, $n = 1, 2, \dots$ esetén pedig

$$(2) \quad \eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n.$$

Mint ismeretes, az η_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) változók sorozata egy egyenesen bolyongó részecske pályáját írja le. Ha a részecske az $x = 0$ pontból indul el és minden egyes lépésben $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pozitív irányba, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel negatív irányba mozdul el egy egységnyt, akkor η_n lesz a részecske helyzetének abszcisszája n lépés megtétele után.

Ismeretes, hogy

$$(3) \quad \mathbf{P}\{\eta_n = x\} = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n+x}{2}} \frac{1}{2^n}, & \text{ha } x = 2r - n \quad (r = 0, 1, \dots, n) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ugyanis 2^n számú n -lépéses pálya van és ezek mindegyike egyenlően valószínű. Az olyan pályák száma, amelyek n lépéssel az $x = 2r - n$ pontba vezetnek, $\binom{n}{r}$, ugyanis ekkor a részecske r lépést lép pozitív irányba és $n - r$ lépést negatív irányba.

A következőkben bebizonyítjuk az alábbi ismert határeloszlástételt:

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \max (|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_n|) < \sqrt{n} z \} = F(z)$$

határeloszlás létezik, és fennáll, hogy $F(z) = 0$, ha $z \leq 0$, míg pozitív z értékekre

$$(5) \quad F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [\Phi((2k+1)z) - \Phi((2k-1)z)],$$

ahol

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

vagy más alakban:

$$(6) \quad F(z) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}} \quad (z > 0).$$

Megjegyezzük, hogy a fenti határeloszlás nemcsak a speciális $\{\xi_n\}$ változókra érvényes, hanem minden olyan $\{\xi_n\}$ változó-sorozatra, amelyre $\mathbf{M}\{\xi_n\} = 0$, $\mathbf{D}\{\xi_n\} = 1$, és alkalmazható a centrális határeloszlástétel. Ez az ERDŐS—KAC-féle invariancia elv következménye. (Vö.: P. ERDŐS—M. KAC [5]). A tételt a (6) alakban szokás kimondani. Megjegyezzük azonban, hogy M. D. DONSKEER [3] eredményéből következik, hogy a (4) határeloszlás meg egyezik a $\xi(t)$ Wiener-folyamatra vonatkozó $\mathbf{P} \{ \max_{0 \leq t \leq 1} |\xi(t)| < z \}$ valószínűséggel. Ezen utóbbi valószínűség pedig a hővezetési differenciálegyenlet speciális megoldásaként adódik. Ily módon megkaphatjuk az (5) alakot. Erre vonatkozóan utalunk A. SOMMERFELD [15] könyvére. (Vö. még: U. GRENNAN—M. ROSENBLATT [7], L. BACHELIER [2], P. LÉVY [11], W. FELLER [6]). Az (5) és (6) képletek azonosságának közvetlen bizonyításával foglalkozik e füzetben RÉNYI A. [14] dolgozata.

2. §. Abszorpciós bolyongás

Az (1) alatti $\{\xi_n\}$ változók segítségével definiáljuk az $\{\eta_n^*\}$ változók sorozatát a következőképpen. Legyen $\eta_0^* = 0$, $n = 1, 2, \dots$ esetén pedig

$$(7) \quad \eta_n^* = \begin{cases} \eta_{n-1}^* + \xi_n, & \text{ha } |\eta_{n-1}^*| < a \\ \eta_{n-1}^*, & \text{ha } |\eta_{n-1}^*| = a, \end{cases}$$

ahol a adott pozitív egész szám. Az η_n^* ($n = 0, 1, 2, \dots$) változók sorozata, mint ismeretes, abszorbeáló falak jelenlétében bolyongó részecske pályáját

írja le. A részecske kiindul az $x = 0$ pontból és minden egyes lépésben vagy pozitív irányba vagy negatív irányba egységnyi elmozdulást végez, de ha egyszer elérte az $x = a$ vagy $x = -a$ pontot, akkor azontúl ott marad.

Ha $|x^*| < a$, akkor

$$(8) \quad \mathbf{P}\{\eta_n^* = x\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\mathbf{P}\{\eta_n = 4ja + x\} - \mathbf{P}\{\eta_n = (4j+2)a - x\}] .$$

Ennek a képletnek a fennállását rendszerint „tükrözési eljárással” szokták bebizonyítani, azonban egyszerűbben is belátható. Jelölje A a $\{4ja + x\}$ pontok halmazát és B a $\{(4j+2)a - x\}$ pontok halmazát ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Jelölje A az $\eta_n \in A$ eseményt és B az $\eta_n \in B$ eseményt. Továbbá A_0 jelentse azt az eseményt, hogy $\eta_n = x$ és $\max(|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_n|) < a$. Általában felírható, hogy $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{AA_0\} + \mathbf{P}\{A\bar{A}_0\}$. Most azonban $A_0 \subset A$, azaz $\mathbf{P}\{AA_0\} = \mathbf{P}\{A_0\}$. Továbbá $\mathbf{P}\{A\bar{A}_0\} = \mathbf{P}\{B\}$, ugyanis az $A\bar{A}_0$ esemény azt jelenti, hogy a részecske legalább egyszer eléri az $x = \pm a$ pontok egyikét és úgy jut az A halmazba. Az első elérés alkalmával változtassuk meg a részecske továbbhaladásának irányát, akkor A helyett a B halmazba vezető út lesz; másrészt minden, a B halmazba vezető útnak megfelel egy olyan, az A halmazba vezető út, amely érinti az $x = \pm a$ pontok legalább egyikét. Látható, hogy a megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű, és mivel minden egyes n -lépéses út egyenlő valószínűségű, tehát az AA_0 és B események valószínűsége is megegyezik. Így tehát $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{A_0\} + \mathbf{P}\{B\}$. Mivel azonban az A_0 esemény megegyezik az $\eta_n^* = x$ eseménnyel, tehát $\mathbf{P}\{\eta_n^* = x\} = \mathbf{P}\{A_0\} = \mathbf{P}\{A\} - \mathbf{P}\{B\}$, ami bizonyítandó volt.

3. §. A határeloszlástétel bizonyítása

(4)–(5) bizonyítása. Annak a valószínűsége, hogy az abszorpciós bolyongásnál az első n lépésben nem történik abszorpció,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{-a < \eta_n^* < a\} = \\ = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\mathbf{P}\{(4j-1)a < \eta_n < (4j+1)a\} - \mathbf{P}\{(4j+1)a < \eta_n < (4j+3)a\}] , \end{aligned}$$

ami (8)-ból $-a < x < a$ -ra történő összegezéssel adódik. Vagy más alakban:

$$(9) \quad \mathbf{P}\{|\eta_n^*| < a\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [\mathbf{P}\{(2k-1)a < \eta_n < (2k+1)a\}] .$$

Tekintsük most az n -lépéses pályákat általában n -től függő $a = a_n$ mellett, amiről feltesszük, hogy

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = z ,$$

ahol $z > 0$. Most (9)-ből

$$(11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\eta_n^*| < \sqrt{n} z\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [\Phi((2k+1)z) - \Phi((2k-1)z)] .$$

Ugyanis egyrészt a centrális határeloszlástétel szerint

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{(2k-1)a_n < \eta_n < (2k+1)a_n\} = \Phi((2k+1)z) - \Phi((2k-1)z) ,$$

mivel $\mathbf{M}\{\eta_n\} = 0$ és $\mathbf{D}\{\eta_n\} = \sqrt{n}$, másrészt a határeloszlás folytonossága miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\eta_n^*| < \sqrt{n} z\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\eta_n^*| < a_n\} .$$

Továbbá az összegezés és a határátmenet sorrendje felcserélhető, mivel a szereplő sor egyenletesen konvergens.

Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{P}\{|\eta_n^*| < a\} = \mathbf{P}\{\max(|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_n|) < a\} ,$$

tehát (11)-ből következik (5) fennállása is.

(4)–(6) *bizonyítása*. Most rátérünk (6) bizonyítására, ami először R. VON MISES [12] munkájában szerepel. A (8) kifejezésben vegyük tekintetbe, hogy $0 \leq r < l$ esetén

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+l} + \binom{n}{r+2l} + \dots = \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} \left(2 \cos \frac{k\pi}{l}\right)^n \cos \frac{k(n-2r)\pi}{l} .$$

(Vö.: E. NETTO [13], 20. oldal). Ennek alkalmazásával és (3) tekintetbevételével

$$\sum_j \mathbf{P}\{\eta_n = 4ja + x\} = \frac{1}{2a} \sum_{k=0}^{2a-1} \left(\cos \frac{k\pi}{2a}\right)^n \cos \frac{k\pi x}{2a} ,$$

ha $n+x$ páros, különben zérus. (A jobboldal páratlan $n+x$ esetén $1/2a$). Hasonlóan

$$\sum_j \mathbf{P}\{\eta_n = (4j+2)a - x\} = \frac{1}{2a} \sum_{k=0}^{2a-1} (-1)^k \left(\cos \frac{k\pi}{2a}\right)^n \cos \frac{k\pi x}{2a} ,$$

ha $n+x$ páros, különben zérus. (A jobboldal páratlan $n+x$ esetén $1/2a$). Így tehát (8) a következő alakban is felírható:

$$(12) \quad \mathbf{P}\{\eta_n^* = x\} = \frac{1}{a} \sum_{j=0}^{a-1} \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{2a}\right)^n \cos \frac{(2j+1)\pi x}{2a} .$$

Ez a reláció minden x -re érvényes (ugyanis, ha $n+x$ páratlan, akkor a jobb-
oldal zérus). Erre a képletre először R. E. ELLIS [4] jutott differenciaegyenlet
megoldásával (vö.: JORDAN K. [8], 420. oldal). Más bizonyítása a Markov-
láncok elméletével történik (vö.: A. A. ANIS [1]).

Legyen ismét $a = a_n$ a (10) szerinti, akkor

$$\mathbf{P}\{|\eta_n^*| < a_n\} = \frac{1}{a_n} \sum_{j=0}^{a_n-1} \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{2a_n} \right)^n \sum_{|x| < a_n} \cos \frac{(2j+1)\pi x}{2a_n}.$$

Most

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{|x| < a_n} \cos \frac{(2j+1)\pi x}{2a_n} = \frac{2}{(2j+1)\pi} \int_{-\frac{(2j+1)\pi}{2}}^{\frac{(2j+1)\pi}{2}} \cos y \, dy = \frac{4(-1)^j}{(2j+1)\pi}$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{2a_n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8n^2} \right)^n = e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}}.$$

Következőleg

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\eta_n^*| < \sqrt{n}z\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{|\eta_n^*| < a_n\} = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}},$$

ugyanis egyrészt a határeloszlás folytonos, másrészt könnyen igazolható,
hogy a határátmenet tagonként képezhető. (13)-ból (6) fennállása is követ-
kezik.

Megjegyzések. Megjegyezzük, hogy az (5) és (6) alatti eloszlásfüggvények
azonosságából az $f(z) = F'(z)$ sűrűségfüggvényekre a következő azonosság
nyerhető:

$$(14) \quad f(z) = \frac{\pi}{z^3} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1) e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{2z^2}},$$

amely a thetafüggvények segítségével közvetlenül is igazolható. Ugyanis

$$(15) \quad f(z) = -\frac{2}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{\partial \vartheta_3(v, z^2/2\pi^2)}{\partial v} \right)_{v=1/4},$$

ahol

$$\vartheta_3(v, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi z}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(v+j)^2}{z}} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 \pi^2 z} \cos 2\pi k v.$$

A (14) képletből könnyen adódik, hogy $f(z)$ kielégíti a következő függvény-egyenletet :

$$f(z) = \left(\frac{\pi}{2z^2}\right)^{3/2} f\left(\frac{\pi}{2z}\right).$$

Megjegyezzük továbbá, hogy (14) szerint a kérdéses valószínűségeloszlás s -edik momentuma :

$$(16) \quad M_s = \int_0^\infty z^s f(z) dz = \frac{2^{\frac{s+3}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s}.$$

Ha speciálisan $s = 2m + 1$:

$$(17) \quad M_{2m+1} = \frac{m! \pi^{2m+1}}{2^m (2m)! \sqrt{2\pi}} |E_{2m}|,$$

ahol E_0, E_1, \dots az Euler-számokat jelölik (vö.: CH. JORDAN [9], 300. oldal). Speciálisan $E_0 = 1, E_2 = -1, E_4 = 5, E_6 = -61, E_8 = 1385$ s í. t.

4. §. Egy feltételes határeloszlástétel

Megjegyezzük, hogy a fentiek alapján könnyen meghatározhatjuk az ismert Kolmogorov-féle eloszlásfüggvényt (vö.: A. N. KOLMOGOROV [10]) kétféle alakját is. Mégpedig bebizonyítjuk, hogy fennáll

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\max(|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_{2n}|) < \sqrt{2n} z \mid \eta_{2n} = 0\} = K(z)$$

ahol $K(z) = 0$, ha $z \leq 0$ és pozitív z értékekre

$$(19) \quad K(z) = \sum_{k=-\infty}^\infty (-1)^k e^{-2k^2 z^2}$$

vagy más alakban

$$(20) \quad K(z) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2z} \sum_{j=0}^\infty e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}}.$$

(18)–(19) bizonyítása. (8) szerint fennáll, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0 \mid \eta_{2n} = 0\} = \frac{\mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0\}}{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 0\}} = \sum_{k=-\infty}^\infty \frac{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 2ka\}}{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 0\}}.$$

Ha ebben a kifejezésben $a = a_{2n}$ a (10) értelmezés szerint, úgy $n \rightarrow \infty$ határátmenettel azt nyerjük, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0 \mid \eta_{2n} = 0\} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k e^{-2k^2 z^2};$$

ugyanis (2)-ből kifolyólag

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 2ka\}}{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 0\}} = e^{-2k^2 z^2},$$

és könnyen igazolható, hogy az összegezés és a határátmenet sorrendje felcserélhető. Ez igazolja (19)-et is.

(18)—(20) bizonyítása. (12) szerint fennáll, hogy

$$\mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0, \eta_{2n} = 0\} = \frac{\mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0\}}{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 0\}} = \frac{1}{a \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}}} \sum_{j=0}^{a-1} \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{2a} \right)^{2n}.$$

Legyen most a fenti kifejezésben $a = a_{2n} \sim \sqrt{2n}z$; akkor $n \rightarrow \infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0 \mid \eta_{2n} = 0\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2z} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}}$$

ami (20)-at is igazolja.

Megjegyzés. A $K(z)$ eloszlásfüggvény s -edik momentuma

$$(21) \quad M_s^* = s \int_0^{\infty} z^{s-1} [1 - K(z)] dz = \frac{s \Gamma(s/2)}{2^{s/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s}.$$

Ha speciálisan $s = 2m$, akkor

$$M_{2m}^* = \frac{(2^{2m-1} - 1) m! \pi^{2m}}{2^{m-1} (2m)!} |B_{2m}|$$

ahol B_0, B_1, \dots a Bernoulli számokat jelölik (vö.: CH. JORDAN [9], 234. oldal). Speciálisan $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, $B_6 = 1/42$, $B_8 = -1/30$ s. í. t.

(Beérkezett : 1957. III. 4.)

IRODALOM

- [1] ANIS, A. A.: „On the distribution of the range of partial sums of independent random variables”. *Proceedings of Mathematical and Physical Society of Egypt* **1** (1954) 83–89.
- [2] BACHELIER, L.: „Théorie mathématique du jeu”. *Annali della Scuola Normale Superiore (Pisa)* **18** (1901) 143–210.
- [3] DONSKEER, M. D.: „An invariance principle for certain probability limit theorems”. *Memoirs of the American Mathematical Society* **6** (1951) 1–11.
- [4] ELLIS, R. E.: „On the solution of equations in finite differences”. *Cambridge Mathematical Journal* **4** (1844) 182.
- [5] ERDŐS, P.—KAC, M.: „On certain limit theorems of the theory of probability”. *Bulletin of the American Mathematical Society* **52** (1946) 292–302.
- [6] FELLER, W.: „The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables”. *Annals of Mathematical Statistics* **22** (1951) 427–439.

- [7] GRENANDER, U.—ROSENBLATT, M.: „Statistical spectral analysis of time series arising from stationary stochastic processes”. *Annals of Mathematical Statistics* **24** (1953) 537—558.
- [8] JORDAN K.: *Fejezetek a klasszikus valószínűség-számításból*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.
- [9] JORDAN, CH.: *Calculus of finite differences*, Eggenberger, Budapest, 1939.
- [10] KOLMOGOROV, A. N.: „Sulla determinazione empirico di una legge di distribuzione”. *Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari* **4** (1933) 13—91.
- [11] LÉVY, P.: *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier-Villars, Paris, 1948. („Monographies des Probabilités”, fasc. VI.)
- [12] VON MISES, R.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik*. Deuticke, Leipzig—Wien, 1931.
- [13] NETTO, E.: *Lehrbuch der Combinatorik*. Teubner, Leipzig, 1901.
- [14] RÉNYI A.: „Az $L(z)$ valószínűség-eloszlásfüggvényről”. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **2** (1957) 43—50. (e fűzetben).
- [15] SOMMERFELD, A.: *Partielle Differentialgleichungen der Physik*. Akademische Verlagsgesellschaft, Berlin, 1954.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О БЛУЖДЕНИИ

L. TAKÁCS

Резюме

Рассмотрим блуждающую частицу, которая исходя из точки $x = 0$ вещественной оси, может на каждом шаге, независимо от остальных, с той же вероятностью сдвинуться на единицу в положительном или отрицательном направлении. Пусть положение частицы после n шагов обозначает η_n . Рассмотрим, далее, это же блуждание с той только разницей, что в точках $x = a$ и $x = -a$ находится поглощающая стена. Пусть в этом случае положение частицы после n шагов обозначается через η_n^* . Автор даёт простое доказательство следующих известных результатов.

Для блуждания с поглощающей стеной имеет место

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\eta_n^* = x\} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\mathbf{P}\{\eta_n = 4ja + x\} - \mathbf{P}\{\eta_n = (4j+2)a - x\}] = \\ &= \frac{1}{a} \sum_{j=0}^{a-1} \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{2a} \right)^n \cos \frac{(2j+1)\pi x}{2a}. \end{aligned}$$

Для обычного блуждания имеет место

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\max(|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_n|) < \sqrt{n}z\} = F(z)$$

где $F(z) = 0$, если $z \leq 0$, и в случае $z > 0$

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [\Phi((2k+1)z) - \Phi((2k-1)z)] = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}},$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy .$$

Далее, имеет место следующая теорема об условном предельном распределении :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \max (|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_{2n}|) < \sqrt{2n} z | \eta_{2n} = 0 \} = K(z) ,$$

где $K(z) = 0$, если $z \leq 0$, а в случае $z > 0$

$$K(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2z} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8 z^2}}$$

ON RANDOM WALK PROBLEMS

L. TAKÁCS

Summary

Let us consider the motion of a particle on a straight line, which starts at $x = 0$, and in each step it can move either a unit distance to the right or a unit distance to the left with the same probability $1/2$, the displacements being independent of each other. Denote by η_n the position of the particle after the n -th step. Further let us consider the above random walk with absorbing barriers at $x = a$ and $x = -a$. Denote by η_n^* the position of the particle at the n -th step.

For the random walk with absorbing barriers we have

$$\mathbf{P} \{ \eta_n^* = x \} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [\mathbf{P} \{ \eta_n = 4ja + x \} - \mathbf{P} \{ \eta_n = (4j+2)a - x \}]$$

or

$$\mathbf{P} \{ \eta_n^* = x \} = \frac{1}{a} \sum_{j=0}^{a-1} \left(\cos \frac{(2j+1)\pi}{2a} \right)^n \cos \frac{(2j+1)\pi x}{2a}$$

if $x \neq \pm a$.

For the ordinary random walk we have the following limiting distribution

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \max (|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_n|) < \sqrt{n} z \} = F(z)$$

where $F(z) = 0$ if $z \leq 0$ and

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [\Phi((2k+1)z) - \Phi((2k-1)z)] = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}}$$

if $z > 0$. Here

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Further we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \max (|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_{2n}|) < \sqrt{2n} z \mid \eta_{2n} = 0 \} = K(z) ,$$

where $K(z) = 0$ if $z \leq 0$ and

$$K(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2z} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{8z^2}}$$

for $z > 0$.

ON A GENERALIZATION OF THE RENEWAL THEORY

LAJOS TAKÁCS

Introduction

The renewal theory, as it is well known, deals with the following problem: Suppose that a machine is working *continuously*. Let us consider a certain piece of equipment of the machine. This piece was placed in the machine at the instant $t = 0$. As soon as the piece fails, it is replaced by a new piece of the same kind. Proceeding similarly if the n -th piece fails it will be replaced by an $n + 1$ -st piece ($n = 1, 2, \dots$). Denote by $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots$ the life spans of the 1-st, 2-nd, \dots , n -th, \dots piece respectively. It is supposed that $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, \dots$ are independent identically distributed non-negative random variables with $\mathbf{P}\{\zeta_n \leq x\} = K(x)$. Denote by v_t the number of replacements in the time interval $(0, t]$. The renewal theory deals with the investigation of the behaviour of the random variable v_t .

At present we shall deal with a more general problem. Suppose that the machine is working *intermittently*. Assume that the machine does not work at the instant $t = 0$. Denote by $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$ the lengths of the successive idle periods and working periods respectively. We suppose that they are non-negative independent random variables with $\mathbf{P}\{\xi_n < x\} = G(x)$ and $\mathbf{P}\{\eta_n \leq x\} = H(x)$ ($n = 1, 2, \dots$), further that these variables are independent of the variables ζ_n too. Denote by $\beta(t)$ the measure of the set consisting of those points of the interval $(0, t]$ for which the machine is working. As the number of replacements in the time interval $(0, t]$ depends only on $\beta(t)$ we shall denote it by $v_{\beta(t)}$. In the following we shall determine the asymptotic distribution of $v_{\beta(t)}$ as $t \rightarrow \infty$, under different assumptions.

We remark that the necessity of the determination of the asymptotic distribution of such a random variable as $v_{\beta(t)}$ arose for instance in connection with the storage problem treated by I. PALÁSTI, A. RÉNYI, T. SZENTMÁRTONY and the author [4] and by M. ZIERMANN [8].

1. §. The distribution of the random variable $v_{\beta(t)}$

Denote by $G_n(x)$, $H_n(x)$ and $K_n(x)$ respectively the n -fold convolution of $G(x)$, $H(x)$ and $K(x)$ with itself and put $G_0(x) \equiv H_0(x) \equiv K_0(x) = 1$ if $x \geq 0$ and $= 0$ if $x < 0$. It is easy to see that

$$\mathbf{P}\{v_{\beta(t)} < n | \beta(t) = x\} = 1 - K_n(x).$$

We have shown in [5] that

$$\mathbf{P}\{\beta(t) \leq x\} = \Omega(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) [G_n(t-x) - G_{n+1}(t-x)] .$$

By the total probability theorem we have

$$\mathbf{P}\{\nu_{\beta(t)} < n\} = 1 - \int_0^t K_n(x) d_x \Omega(t, x) .$$

2. §. The asymptotic distribution of $\nu_{\beta(t)}$

It is plausible that $\nu_{\beta(t)}$ has an asymptotic distribution if and only if $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, $\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n$ and $\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_n$ have asymptotic distributions as $n \rightarrow \infty$. A necessary and sufficient condition for the existence of these asymptotic distributions was given by W. DOEBLIN [2] (cf. W. FELLER [3]). Considering DOEBLIN's conditions and simplifying the situation we shall assume that the distribution functions $G(x)$, $H(x)$ and $K(x)$ satisfy one of the assumptions $(g_1), (g_2), (g_3)$; $(h_1), (h_2), (h_3)$ and $(k_1), (k_2), (k_3)$, respectively which will be defined below. In this case there exists always a limiting distribution.

Introduce the following notations

$$\alpha = \int_0^{\infty} x dG(x) , \quad \sigma_a^2 = \int_0^{\infty} (x - \alpha)^2 dG(x) ,$$

$$\beta = \int_0^{\infty} x dH(x) , \quad \sigma_\beta^2 = \int_0^{\infty} (x - \beta)^2 dH(x) ,$$

and

$$\tau = \int_0^{\infty} x dK(x) , \quad \sigma_\tau^2 = \int_0^{\infty} (x - \tau)^2 dK(x) .$$

Further denote by $F_\gamma(x)$ ($0 < \gamma < 2, \gamma \neq 1$) the stable distribution function whose characteristic function is given by

$$\varphi_\gamma(z) = \exp \left\{ -|z|^\gamma \left(\cos \frac{\pi\gamma}{2} - i \sin \frac{\pi\gamma}{2} \operatorname{sign} z \right) \Gamma(1-\gamma) \right\}$$

and put

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du .$$

Finally let A^*, B, C be arbitrary finite positive numbers.

Assumptions for $G(x)$:

$$(g_1) \quad \sigma_a < \infty .$$

$$(g_2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [1 - G(x)] x^{\gamma_1} = A \text{ where } 1 < \gamma_1 < 2 .$$

$$(g_3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [1 - G(x)] x^{\gamma_1} = A \text{ where } 0 < \gamma_1 < 1 .$$

Assumptions for $H(x)$:

$$(h_1) \quad \sigma_\beta < \infty .$$

$$(h_2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [1 - H(x)] x^{\gamma_2} = B \text{ where } 1 < \gamma_2 < 2 .$$

$$(h_3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [1 - H(x)] x^{\gamma_2} = B \text{ where } 0 < \gamma_2 < 1 .$$

Assumptions for $K(x)$:

$$(k_1) \quad \sigma_\tau < \infty .$$

$$(k_2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [1 - K(x)] x^{\gamma_3} = C \text{ where } 1 < \gamma_3 < 2 .$$

$$(k_3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [1 - K(x)] x^{\gamma_3} = C \text{ where } 0 < \gamma_3 < 1 .$$

The determination of the asymptotic distribution of v_t for fixed t can be reduced to that of $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, namely

$$\mathbf{P}\{v_t < n\} = \mathbf{P}\{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n > t\} .$$

Applying a method given by W. FELLER [3] we obtain the following asymptotic distributions for v_t .

In case (k_1)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{v_t - \frac{t}{\tau}}{\left(\frac{\sigma_\tau^2 t}{\tau^3} \right)^{1/2}} \leq x \right\} = \Phi(x) ,$$

in case (k_2)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{v_t - \frac{t}{\tau}}{\left(\frac{Ct}{\tau^{1+\gamma_3}} \right)^{1/\gamma_3}} \leq x \right\} = 1 - F_{\gamma_3}(-x) ,$$

and in case (k_3)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{v_t C}{t^{\gamma_3}} \leq x \right\} = 1 - F_{\gamma_3}(x^{-\frac{1}{\gamma_3}}) .$$

In our papers [6] and [7] we have proved the asymptotic distributions of $\beta(t)$ given in Table I., where ξ and η are independent random variables with distribution functions $\mathbf{P}\{\xi \leq x\} = F_{\gamma_1}(x)$ and $\mathbf{P}\{\eta \leq x\} = F_{\gamma_2}(x)$.

Table I.

	$H(x)$	$G(x)$	γ	Ω_t	$\lim_{t \rightarrow \infty} \Omega_t$	x
1.	h_1	g_1		$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha + \beta} + x \left(\frac{t}{\alpha + \beta}\right)^{1/2}\right)$	$\Phi\left(\frac{(\alpha + \beta)x}{\sqrt{\beta^2 \sigma_a^2 + \alpha^2 \sigma_\beta^2}}\right)$	$(-\infty, \infty)$
2.	h_1	g_2		$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha + \beta} + x \left(\frac{t}{\alpha + \beta}\right)^{1/\gamma_1}\right)$	$1 - F_{\gamma_1}\left(\frac{-(\alpha + \beta)x}{\beta A^{1/\gamma_1}}\right)$	$(-\infty, \infty)$
3.	h_1	g_3		$\Omega(t, x t^{\gamma_1})$	$1 - F_{\gamma_1}\left(\left(\frac{\beta}{A x}\right)^{1/\gamma_1}\right)$	$(0, \infty)$
4.	h_2	g_1		$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha + \beta} + x \left(\frac{t}{\alpha + \beta}\right)^{1/\gamma_2}\right)$	$F_{\gamma_2}\left(\frac{(\alpha + \beta)x}{\alpha B^{1/\gamma_2}}\right)$	$(-\infty, \infty)$
5.	h_2	g_2	$\gamma_2 > \gamma_1$	$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha + \beta} + x \left(\frac{t}{\alpha + \beta}\right)^{1/\gamma_1}\right)$	$1 - F_{\gamma_1}\left(\frac{-(\alpha + \beta)x}{\beta A^{1/\gamma_1}}\right)$	$(-\infty, \infty)$
6.	h_2	g_2	$\gamma_i = \gamma$ ($i = 1, 2$)	$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha + \beta} + x \left(\frac{t}{\alpha + \beta}\right)^{1/\gamma}\right)$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\alpha B^{1/\gamma} \eta - \beta A^{1/\gamma} \xi}{\alpha + \beta} \leq x\right\}$	$(-\infty, \infty)$
7.	h_2	g_2	$\gamma_2 < \gamma_1$	$\Omega\left(t, \frac{\beta t}{\alpha + \beta} + x \left(\frac{t}{\alpha + \beta}\right)^{1/\gamma_2}\right)$	$F_{\gamma_2}\left(\frac{(\alpha + \beta)x}{\alpha B^{1/\gamma_2}}\right)$	$(-\infty, \infty)$
8.	h_2	g_3		$\Omega(t, x t^{\gamma_1})$	$1 - F_{\gamma_1}\left(\left(\frac{\beta}{A x}\right)^{1/\gamma_1}\right)$	$(0, \infty)$
9.	h_3	g_1		$\Omega(t, t + x t^{\gamma_2})$	$F_{\gamma_2}\left(\left(\frac{-\alpha}{B x}\right)^{1/\gamma_2}\right)$	$(-\infty, 0)$
10.	h_3	g_2		$\Omega(t, t + x t^{\gamma_2})$	$F_{\gamma_2}\left(\left(\frac{-\alpha}{B x}\right)^{1/\gamma_2}\right)$	$(-\infty, 0)$
11.	h_3	g_3	$\gamma_2 > \gamma_1$	$\Omega(t, x t^{\gamma_2})$	$P\left\{\frac{\eta^{\gamma_2}}{\xi^{\gamma_1}} \leq \frac{A x^{\gamma_2}}{B}\right\}$	$(0, \infty)$
12.	h_3	g_3	$\gamma_i = \gamma$ ($i = 1, 2$)	$\Omega(t, x t)$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta}{\xi} \leq \left(\frac{A}{B}\right)^{1/\gamma} \frac{x}{1-x}\right\}$	$(0, 1)$
13.	h_3	g_3	$\gamma_2 < \gamma_1$	$\Omega(t, t + x t^{\gamma_2})$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta^{\gamma_2}}{\xi^{\gamma_1}} \leq \frac{A}{B(-x)^{\gamma_1}}\right\}$	$(-\infty, 0)$

If $K(x)$ satisfies one of the assumptions (k_1) , (k_2) , (k_3) and the asymptotic distribution of $\beta(t)$ agrees with one of the above expressions 1—13., then taking into consideration that the random variables $\{\nu_t\}$ are independent of the random variables $\{\beta(t)\}$, we can apply a theorem of R. L. DOBRUSHIN [1] to prove the existence of the following limiting distribution

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\nu_{\beta(t)} - Tt^\lambda}{St^\mu} \leq x \right\} = \Psi(x)$$

with appropriate distribution function $\Psi(x)$ and appropriate parameters T, λ, S, μ . The unknowns $\Psi(x), T, \lambda, S$ and μ may be determined by the aid of DOBRUSHIN's theorem. So we obtain 59 different cases and the corresponding theorems are stated in Table II. where ξ_0, ξ, η and ζ are independent random variables with distribution functions $\mathbf{P}\{\xi_0 \leq x\} = \Phi(x)$, $\mathbf{P}\{\xi \leq x\} = F_{\gamma_1}(x)$, $\mathbf{P}\{\eta \leq x\} = F_{\gamma_2}(x)$ and $\mathbf{P}\{\zeta \leq x\} = F_{\gamma_3}(x)$.

Table II. (cf. pp. 96—101.)

In particular we have by Theorem 1. the following important case

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{\nu_{\beta(t)} - \frac{\beta t}{(\alpha + \beta)\tau}}{\sqrt{\left(\frac{\beta^2 \sigma_\alpha^2}{(\alpha + \beta)^3 \tau^2} + \frac{\alpha^2 \sigma_\beta^2}{(\alpha + \beta)^3 \tau^2} + \frac{\beta \sigma_\tau^2}{(\alpha + \beta) \tau^3} \right) t}} \leq x \right\} = \Phi(x),$$

if $\sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_\tau^2 < \infty$,

(Received : 20. V. 1957.)

REFERENCES

- [1] ДОБРУШИН, Р. Л.: „Лемма о пределе сложной случайной Функции”, *Успехи Математических Наук СССР* **10**:2 (1955) 157—159.
- [2] DOEBLIN, W.: „Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilités”. *Studia Mathematica* **9** (1940) 71—96.
- [3] FELLER, W.: „Fluctuation theory of recurrent events”. *Transactions of the American Mathematical Society* **67** (1949) 98—119.
- [4] PALÁSTI I.—RÉNYI A.—SZENTMÁRTONY T.—TAKÁCS L.: „A raktárhészlet pótlásáról, I. A törzshészlet”. *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 187—201.
- [5] TAKÁCS, L.: „On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes”. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **8** (1957) 169—191.
- [6] TAKÁCS, L.: „On limiting distributions concerning a sojourn time problem”. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **8** (1957) 279—294.
- [7] TAKÁCS, L.: „On a sojourn time problem”. *Теория Вероятностей и её Применения* **3** (1958) 61—69.
- [8] ZIERMANN M.: „A raktárhészlet pótlásáról, II. A készletpótló rendelés”. *A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei* **2** (1953) 203—216.

Table II.

	$K(x)$	$H(x)$	$G(x)$	γ	T	λ	S	μ	$\Psi(x)$
1.	k_1	h_1	g_1		$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\Phi\left(\frac{(\alpha + \beta)^{3/2}\tau^{3/2}x}{\sqrt{\tau\beta^2\sigma_a^2 + \tau\alpha^2\sigma_\beta^2 + \beta(\alpha + \beta)^2\sigma_\tau^2}}\right)$
2.	k_1	h_1	g_2		$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\alpha + \beta}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}$	$\frac{1}{\gamma_1}$	$1 - F_{\gamma_1}\left(\frac{-(\alpha + \beta)x}{\beta A^{1/\gamma_1}}\right)$
3.	k_1	h_1	g_3		0	—	$\frac{1}{\tau}$	γ_1	$1 - F_{\gamma_1}\left(\left(\frac{\beta}{Ax}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}\right)$
4.	k_1	h_2	g_1		$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\alpha + \beta}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}$	$\frac{1}{\gamma_2}$	$F_{\gamma_2}\left(\frac{(\alpha + \beta)x}{\alpha B^{1/\gamma_2}}\right)$
5.	k_1	h_2	g_2	$\gamma_2 > \gamma_1$	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\alpha + \beta}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}$	$\frac{1}{\gamma_1}$	$1 - F_{\gamma_1}\left(\frac{-(\alpha + \beta)x}{\beta A^{1/\gamma_1}}\right)$
6.	k_1	h_2	g_2	$\gamma_i = \gamma$ ($i = 1, 2$)	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\alpha + \beta}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$	$\frac{1}{\gamma}$	$\mathbf{P}\left\{\frac{\frac{1}{\alpha B^\gamma}\eta - \frac{1}{\beta A^\gamma}\xi}{(\alpha + \beta)} \leq x\right\}$
7.	k_1	h_2	g_2	$\gamma_2 < \gamma_1$	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{\alpha + \beta}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}}$	$\frac{1}{\gamma_2}$	$F_{\gamma_2}\left(\frac{(\alpha + \beta)x}{\alpha B^{1/\gamma_2}}\right)$
8.	k_1	h_2	g_3		0	—	$\frac{1}{\tau}$	γ_1	$1 - F_{\gamma_1}\left(\left(\frac{\beta}{Ax}\right)^{\frac{1}{\gamma_1}}\right)$
9.	k_1	h_3	g_1	$\gamma_2 > \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\tau}$	1	$\frac{1}{\tau}$	γ_2	$F_{\gamma_2}\left(\left(\frac{-\alpha}{Bx}\right)^{1/\gamma_2}\right)$

10.	k_1	h_3	g_1	$\gamma_2 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\tau}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{P} \left\{ \left(\frac{\sigma_\tau^2}{\tau^3} \right)^{\frac{1}{2}} \xi_0 - \frac{\alpha \eta^{-\frac{1}{2}}}{B \tau} \leq x \right\}$
11.	k_1	h_3	g_1	$\gamma_2 < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\tau}$	1	$\left(\frac{\sigma_\tau^2}{\tau^3} \right)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\Phi(x)$
12.	k_1	h_3	g_2	$\gamma_2 > \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\tau}$	1	$\frac{1}{\tau}$	γ_2	$F_{\gamma_2} \left(\left(\frac{-\alpha}{B x} \right)^{1/\gamma_2} \right)$
13.	k_1	h_3	g_2	$\gamma_2 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\tau}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{P} \left\{ \left(\frac{\sigma_\tau^2}{\tau^3} \right)^{\frac{1}{2}} \xi_0 - \frac{\alpha \eta^{-\frac{1}{2}}}{B \tau} \leq x \right\}$
14.	k_1	h_3	g_2	$\gamma_2 < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{\tau}$	1	$\left(\frac{\sigma_\tau^2}{\tau^3} \right)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\Phi(x)$
15.	k_1	h_3	g_3	$\gamma_2 > \gamma_1$	0	—	$\frac{1}{\tau}$	$\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$	$\mathbf{P} \left\{ \frac{\eta^{\gamma_2}}{\xi^{\gamma_1}} \leq \frac{A x^{\gamma_2}}{B} \right\}$
16.	k_1	h_3	g_3	$\gamma_i = \gamma$ ($i = 1, 2$)	0	—	$\frac{1}{\tau}$	1	$\mathbf{P} \left\{ \frac{\eta}{\xi} \leq \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{x}{1-x} \right\}$
17.	k_1	h_3	g_3	$\gamma_1 > \gamma_2 > \frac{\gamma_1}{2}$	$\frac{1}{\tau}$	1	$\frac{1}{\tau}$	$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$	$\mathbf{P} \left\{ \frac{\eta^{\gamma_2}}{\xi^{\gamma_1}} \leq \frac{A}{B(-x)^{\gamma_1}} \right\}$
18.	k_1	h_3	g_3	$\gamma_2 = \frac{\gamma_1}{2}$	$\frac{1}{\tau}$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\mathbf{P} \left\{ \left(\frac{\sigma_\tau^2}{\tau^3} \right)^{1/2} \xi_0 - \frac{1}{\tau} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \frac{\xi}{\eta^{1/2}} \leq x \right\}$
19.	k_1	h_3	g_3	$\gamma_2 < \frac{\gamma_1}{2}$	$\frac{1}{\tau}$	1	$\left(\frac{\sigma_\tau^2}{\tau^3} \right)^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\Phi(x)$

Table II. (continued)

	$K(x)$	$H(x)$	$G(x)$	γ	T	λ	S	μ	$\Psi(x)$
20.	k_2	h_1	g_1		$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau} \left(\frac{\beta C}{(\alpha + \beta)\tau} \right)^{\frac{1}{\gamma_3}}$	$\frac{1}{\gamma_3}$	$1 - F_{\gamma_3}(-x)$
21.	k_2	h_1	g_2	$\gamma_3 > \gamma_1$	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\alpha + \beta} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}}$	$\frac{1}{\gamma_1}$	$1 - F_{\gamma_1} \left(\frac{-(\alpha + \beta)x}{\beta A^{1/\gamma_1}} \right)$
22.	k_2	h_1	g_2	$\gamma_3 = \gamma_1$	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	1	$\frac{1}{\gamma_1}$	$\mathbf{P} \left\{ \frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau} \left(\frac{A}{\alpha + \beta} \right)^{1/\gamma_1} \xi + \frac{1}{\tau} \left(\frac{C\beta}{(\alpha + \beta)\tau} \right)^{1/\gamma_1} \zeta \geq -x \right\}$
23.	k_2	h_1	g_2	$\gamma_3 < \gamma_1$	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau} \left(\frac{\beta C}{(\alpha + \beta)\tau} \right)^{\frac{1}{\gamma_3}}$	$\frac{1}{\gamma_3}$	$1 - F_{\gamma_3}(-x)$
24.	k_2	h_1	g_3		0	—	$\frac{1}{\tau}$	γ_1	$1 - F_{\gamma_1} \left(\left(\frac{\beta}{Ax} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \right)$
25.	k_2	h_2	g_1	$\gamma_3 > \gamma_2$	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\alpha + \beta} \right)^{\frac{1}{\gamma_2}}$	$\frac{1}{\gamma_2}$	$F_{\gamma_2} \left(\frac{(\alpha + \beta)x}{\alpha B^{1/\gamma_2}} \right)$
26.	k_2	h_2	g_1	$\gamma_3 = \gamma_2$	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	1	$\frac{1}{\gamma_2}$	$\mathbf{P} \left\{ \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)\tau} \left(\frac{B}{\alpha + \beta} \right)^{1/\gamma_2} \eta - \frac{1}{\tau} \left(\frac{C\beta}{(\alpha + \beta)\tau} \right)^{1/\gamma_2} \zeta \leq x \right\}$
27.	k_2	h_2	g_1	$\gamma_3 < \gamma_2$	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau} \left(\frac{\beta C}{(\alpha + \beta)\tau} \right)^{\frac{1}{\gamma_3}}$	$\frac{1}{\gamma_3}$	$1 - F_{\gamma_3}(-x)$
28.	k_2	h_2	g_2	$\gamma_3 > \gamma_1$ $\gamma_2 > \gamma_1$	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\alpha + \beta} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}}$	$\frac{1}{\gamma_1}$	$1 - F_{\gamma_1} \left(\frac{-(\alpha + \beta)x}{\beta A^{1/\gamma_1}} \right)$

29.	k_2	h_2	g_2	$\gamma_3 = \gamma_1$ $\gamma_2 > \gamma_1$	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	1	$\frac{1}{\gamma_1}$	$\mathbf{P} \left\{ \frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau} \left(\frac{A}{\alpha + \beta} \right)^{1/\gamma_1} \xi + \frac{1}{\tau} \left(\frac{C\beta}{(\alpha + \beta)\tau} \right)^{1/\gamma_1} \zeta \geq -x \right\}$
30.	k_2	h_2	g_2	$\gamma_3 < \gamma_1$ $\gamma_2 > \gamma_1$	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau} \left(\frac{\beta C}{(\alpha + \beta)\tau} \right)^{1/\gamma_3}$	$\frac{1}{\gamma_3}$	$1 - F_{\gamma_3}(-x)$
31.	k_2	h_2	g_2	$\gamma_3 > \gamma$ $\gamma_i = \gamma$ ($i = 1, 2$)	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\alpha + \beta} \right)^{1/\gamma}$	$\frac{1}{\gamma}$	$\mathbf{P} \left\{ \frac{\alpha B^{1/\gamma} \eta - \beta A^{1/\gamma} \xi}{\alpha + \beta} \leq x \right\}$
32.	k_2	h_2	g_2	$\gamma_i = \gamma$ ($i = 1, 2, 3$)	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	1	$\frac{1}{\gamma}$	$\mathbf{P} \left\{ \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)\tau} \left(\frac{B}{\alpha + \beta} \right)^{1/\gamma} \eta - \frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau} \left(\frac{A}{\alpha + \beta} \right)^{1/\gamma} \xi - \frac{1}{\tau} \left(\frac{\beta C}{(\alpha + \beta)\tau} \right)^{1/\gamma} \zeta \leq x \right\}$
33.	k_2	h_2	g_2	$\gamma_3 < \gamma$ $\gamma_i = \gamma$ ($i = 1, 2$)	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau} \left(\frac{\beta C}{(\alpha + \beta)\tau} \right)^{1/\gamma_3}$	$\frac{1}{\gamma_3}$	$1 - F_{\gamma_3}(-x)$
34.	k_2	h_2	g_2	$\gamma_3 > \gamma_2$ $\gamma_2 < \gamma_1$	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\alpha + \beta} \right)^{1/\gamma_2}$	$\frac{1}{\gamma_2}$	$F_{\gamma_2} \left(\frac{(\alpha + \beta)x}{\alpha B^{1/\gamma_2}} \right)$
35.	k_2	h_2	g_2	$\gamma_3 = \gamma_2$ $\gamma_2 < \gamma_1$	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	1	$\frac{1}{\gamma_2}$	$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\tau} \left(\frac{B}{\alpha + \beta} \right)^{1/\gamma_2} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \eta - \frac{1}{\tau} \left(\frac{C\beta}{(\alpha + \beta)\tau} \right)^{1/\gamma_2} \zeta \leq x \right\}$
36.	k_2	h_2	g_2	$\gamma_3 < \gamma_2$ $\gamma_2 < \gamma_1$	$\frac{\beta}{(\alpha + \beta)\tau}$	1	$\frac{1}{\tau} \left(\frac{\beta C}{(\alpha + \beta)\tau} \right)^{1/\gamma_3}$	$\frac{1}{\gamma_3}$	$1 - F_{\gamma_3}(-x)$
37.	k_2	h_2	g_3		0	—	$\frac{1}{\tau}$	γ_1	$1 - F_{\gamma_1} \left(\left(\frac{\beta}{Ax} \right)^{1/\gamma_1} \right)$
38.	k_2	h_3	g_1	$\gamma_3 \gamma_3 > 1$	$\frac{1}{\tau}$	1	$\frac{1}{\tau}$	γ_2	$F_{\gamma_2} \left(\left(\frac{-\alpha}{Bx} \right)^{1/\gamma_2} \right)$

Table II. (continued)

	$K(x)$	$H(x)$	$G(x)$	γ	T	λ	S	μ	$\Psi(x)$
39.	k_2	h_3	g_1	$\gamma_2\gamma_3 = 1$	$\frac{1}{\tau}$	1	1	$\frac{1}{\gamma_3}$	$\mathbf{P} \left\{ \frac{\alpha\eta^{-\gamma_2}}{\tau B} + \frac{1}{\tau} \left(\frac{C}{\tau} \right)^{1/\gamma_3} \xi \geq -x \right\}$
40.	k_2	h_3	g_1	$\gamma_2\gamma_3 < 1$	$\frac{1}{\tau}$	1	$\frac{1}{\tau} \left(\frac{C}{\tau} \right)^{\frac{1}{\gamma_3}}$	$\frac{1}{\gamma_3}$	$1 - F_{\gamma_3}(-x)$
41.	k_2	h_3	g_2	$\gamma_2\gamma_3 > 1$	$\frac{1}{\tau}$	1	$\frac{1}{\tau}$	γ_2	$F_{\gamma_2} \left(\left(\frac{-\alpha}{Bx} \right)^{1/\gamma_2} \right)$
42.	k_2	h_3	g_2	$\gamma_2\gamma_3 = 1$	$\frac{1}{\tau}$	1	1	$\frac{1}{\gamma_3}$	$\mathbf{P} \left\{ \frac{\alpha\eta^{-\gamma_2}}{B\tau} + \frac{1}{\tau} \left(\frac{C}{\tau} \right)^{1/\gamma_3} \xi \geq -x \right\}$
43.	k_2	h_3	g_2	$\gamma_2\gamma_3 < 1$	$\frac{1}{\tau}$	1	$\frac{1}{\tau} \left(\frac{C}{\tau} \right)^{\frac{1}{\gamma_3}}$	$\frac{1}{\gamma_3}$	$1 - F_{\gamma_3}(-x)$
44.	k_2	h_3	g_3	$\gamma_2 > \gamma_1$	0	—	$\frac{1}{\tau}$	$\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$	$\mathbf{P} \left\{ \frac{\eta^{\gamma_2}}{\xi^{\gamma_1}} \leq \frac{Ax^{\gamma_2}}{B} \right\}$
45.	k_2	h_3	g_3	$\gamma_i = \gamma$ ($i = 1, 2$)	0	—	$\frac{1}{\tau}$	1	$\mathbf{P} \left\{ \frac{\eta}{\xi} \leq \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{x}{1-x} \right\}$
46.	k_2	h_3	g_3	$\gamma_2 < \gamma_1$ $\gamma_2\gamma_3 > \gamma_1$	$\frac{1}{\tau}$	1	$\frac{1}{\tau}$	$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$	$\mathbf{P} \left\{ \frac{\eta^{\gamma_2}}{\xi^{\gamma_1}} \leq \frac{A}{B(-x)^{\gamma_1}} \right\}$
47.	k_2	h_3	g_3	$\gamma_2 < \gamma_1$ $\gamma_2\gamma_3 = \gamma_1$	$\frac{1}{\tau}$	1	1	$\frac{1}{\gamma_3}$	$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\tau} \left(\frac{A}{B} \right)^{\frac{1}{\gamma_1}} \frac{\xi}{\eta^{\gamma_2/\gamma_1}} + \frac{1}{\tau} \left(\frac{C}{\tau} \right)^{\frac{1}{\gamma_3}} \xi \geq -x \right\}$
48.	k_2	h_3	g_3	$\gamma_2 < \gamma_1$ $\gamma_2\gamma_3 < \gamma_1$	$\frac{1}{\tau}$	1	$\frac{1}{\tau} \left(\frac{C}{\tau} \right)^{\frac{1}{\gamma_3}}$	$\frac{1}{\gamma_3}$	$1 - F_{\gamma_3}(-x)$

49.	k_3	h_1	g_1		0	—	$\frac{1}{C} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^{\gamma_3}$	γ_3	$1 - F_{\gamma_3}(x^{-1/\gamma_3})$
50.	k_3	h_1	g_2		0	—	$\frac{1}{C} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^{\gamma_3}$	γ_3	$1 - F_{\gamma_3}(x^{-1/\gamma_3})$
51.	k_3	h_1	g_3		0	—	$\frac{1}{C}$	$\gamma_3 \gamma_1$	$\mathbf{P} \left\{ \left(\frac{\beta}{A \xi^{\gamma_1} \zeta} \right)^{\gamma_3} \leq x \right\}$
52.	k_3	h_2	g_1		0	—	$\frac{1}{C} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^{\gamma_3}$	γ_3	$1 - F_{\gamma_3}(x^{-1/\gamma_3})$
53.	k_3	h_2	g_2		0	—	$\frac{1}{C} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta} \right)^{\gamma_3}$	γ_3	$1 - F_{\gamma_3}(x^{-1/\gamma_3})$
54.	k_3	h_2	g_3		0	—	$\frac{1}{C}$	$\gamma_3 \gamma_1$	$\mathbf{P} \left\{ \left(\frac{\beta}{A \xi^{\gamma_1} \zeta} \right)^{\gamma_3} \leq x \right\}$
55.	k_3	h_3	g_1		0	—	$\frac{1}{C}$	γ_3	$1 - F_{\gamma_3}(x^{-1/\gamma_3})$
56.	k_3	h_3	g_2		0	—	$\frac{1}{C}$	γ_3	$1 - F_{\gamma_3}(x^{-1/\gamma_3})$
57.	k_3	h_3	g_3	$\gamma_2 > \gamma_1$	0	—	$\frac{1}{C}$	$\frac{\gamma_1 \gamma_3}{\gamma_2}$	$\mathbf{P} \left\{ \left(\frac{B}{A} \right)^{\frac{\gamma_3}{\gamma_2}} \frac{\eta^{\gamma_3}}{\xi^{\gamma_1 \gamma_3 / \gamma_2} \zeta^{\gamma_3}} \leq x \right\}$
58.	k_3	h_3	g_3	$\gamma_i = \gamma$ ($i = 1, 2$)	0	—	$\frac{1}{C}$	γ_3	$\mathbf{P} \left\{ \left(\frac{B^{1/\gamma} \eta}{A^{1/\gamma} \xi + B^{1/\gamma} \eta} \right)^{\gamma} \frac{1}{\zeta^{\gamma_3}} \leq x \right\}$
59.	k_3	h_3	g_3	$\gamma_2 < \gamma_1$	0	—	$\frac{1}{C}$	γ_3	$1 - F_{\gamma_3}(x^{-1/\gamma_3})$

A FELÚJÍTÁS-ELMÉLET ÁLTALÁNOSÍTÁSÁRÓL

TAKÁCS L.

Kivonat

Tekintsünk egy szakaszosan működő gépet. Feltesszük, hogy a gép a $t = 0$ időpontban áll, és az egymást követő állási idők és működési idők azonos eloszlású független valószínűségi változók. Jelölje az állási idők eloszlásfüggvényét $G(x)$, a működési idők eloszlásfüggvényét pedig $H(x)$. Vizsgáljuk valamilyen gépalkatrész cseréinek a számát. Feltesszük, hogy a $t = 0$ időpontban egy új alkatrészt állítunk be. Ha az alkatrész tönkremegy, akkor azonnal hasonló új alkatrésszel helyettesítjük. Feltesszük, hogy az egyes alkatrészek élettartamai azonos eloszlású független valószínűségi változók, $K(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Jelölje a $(0, t]$ időközben történő cserék számát $v_{\beta(t)}$. E dolgozatban különböző feltételek mellett meghatározzuk a $v_{\beta(t)}$ valószínűségi változó aszimptotikus eloszlását, midőn $t \rightarrow \infty$.

A fenti probléma folytonosan működő gép esetében a közönséges felújítás-elméletre redukálódik. A jelenleg vizsgált eset annnyival általánosabb, hogy megengedjük, hogy a gép működésében véletlen szünetek forduljanak elő.

A következő alternatív feltevésekkel élünk a $G(x)$, $H(x)$ és $K(x)$ eloszlásfüggvényekre vonatkozóan:

A $G(x)$ eloszlásfüggvényre vonatkozó feltevések:

(g_1) $G(x)$ szórása véges;

(g_2) $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 - G(x)] x^{\gamma_1} = A$, ahol A pozitív állandó és $1 < \gamma_1 < 2$;

(g_3) $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 - G(x)] x^{\gamma_1} = A$, ahol A pozitív állandó és $0 < \gamma_1 < 1$.

A $H(x)$ eloszlásfüggvényre vonatkozó feltevések:

(h_1) $H(x)$ szórása véges;

(h_2) $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 - H(x)] x^{\gamma_2} = B$, ahol B pozitív állandó és $1 < \gamma_2 < 2$;

(h_3) $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 - H(x)] x^{\gamma_2} = B$, ahol B pozitív állandó és $0 < \gamma_2 < 1$.

A $K(x)$ eloszlásfüggvényre vonatkozó feltevések:

(k_1) $K(x)$ szórása véges;

(k_2) $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 - K(x)] x^{\gamma_3} = C$, ahol C pozitív állandó és $1 < \gamma_3 < 2$;

(k_3) $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 - K(x)] x^{\gamma_3} = C$, ahol C pozitív állandó és $0 < \gamma_3 < 1$.

Kimutatjuk, hogy a fenti feltevések mellett a $v_{\beta(t)}$ változónak létezik aszimptotikus eloszlása. A lehetséges határeloszlások száma 59.

A bizonyítás a szerző [6] és [7] dolgozatán, valamint R. L. DOBRUSIN [1] tételén alapszik.

ОБ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРИИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

L. TAKÁCS

Резюме

Рассмотрим периодически действующий станок. Предположим, что во времени $t=0$ станок не действует, далее, что времена простоя и времена действия отдельно одинаково распределённые случайные величины. Пусть $G(x)$ означает функцию распределения времён простоя и $H(x)$ функцию распределения времён действия. Будем исследовать число обменов некоторой детали станка. Предположим, что в точке времени $t=0$ мы положили новую деталь. Если деталь станка выходит из строя, то мы сейчас заменяем с одной новой подобной деталью. Будем предполагать, что сроки службы деталей одинаково распределённые случайные величины с функцией распределения $K(x)$. Пусть $\nu_{\beta(t)}$ означает число обменов в интервале $(0, t]$. В этой работе мы определяем асимптотическое распределение случайной величины $\nu_{\beta(t)}$ в случае $t \rightarrow \infty$ при разных условиях.

Вышеупомянутая проблема в случае непрерывно действующего станка редуцируется к общей теории восстановления. Вышеупомянутая проблема более общая, потому что мы допустим, что в действии станка могут находиться паузы.

Будем использовать следующими альтернативными предположениями:

Предположения касающиеся функции распределения $G(x)$:

(g_1) дисперсия функции $G(x)$ конечна,

(g_2) $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 - G(x)] x^{\gamma_1} = A$, где A положительное постоянное и $1 < \gamma_1 < 2$.

(g_3) $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 - G(x)] x^{\gamma_1} = A$, где A положительное постоянное и $0 < \gamma_1 < 1$.

Предположения, касающиеся функции распределения $H(x)$:

(h_1) дисперсия функции $H(x)$ конечна

(h_2) $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 - H(x)] x^{\gamma_2} = B$, где B положительное постоянное и $1 < \gamma_2 < 2$.

(h_3) $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 - H(x)] x^{\gamma_2} = B$, где B положительное постоянное и $0 < \gamma_2 < 1$.

Предположения, касающиеся функции распределения $K(x)$:

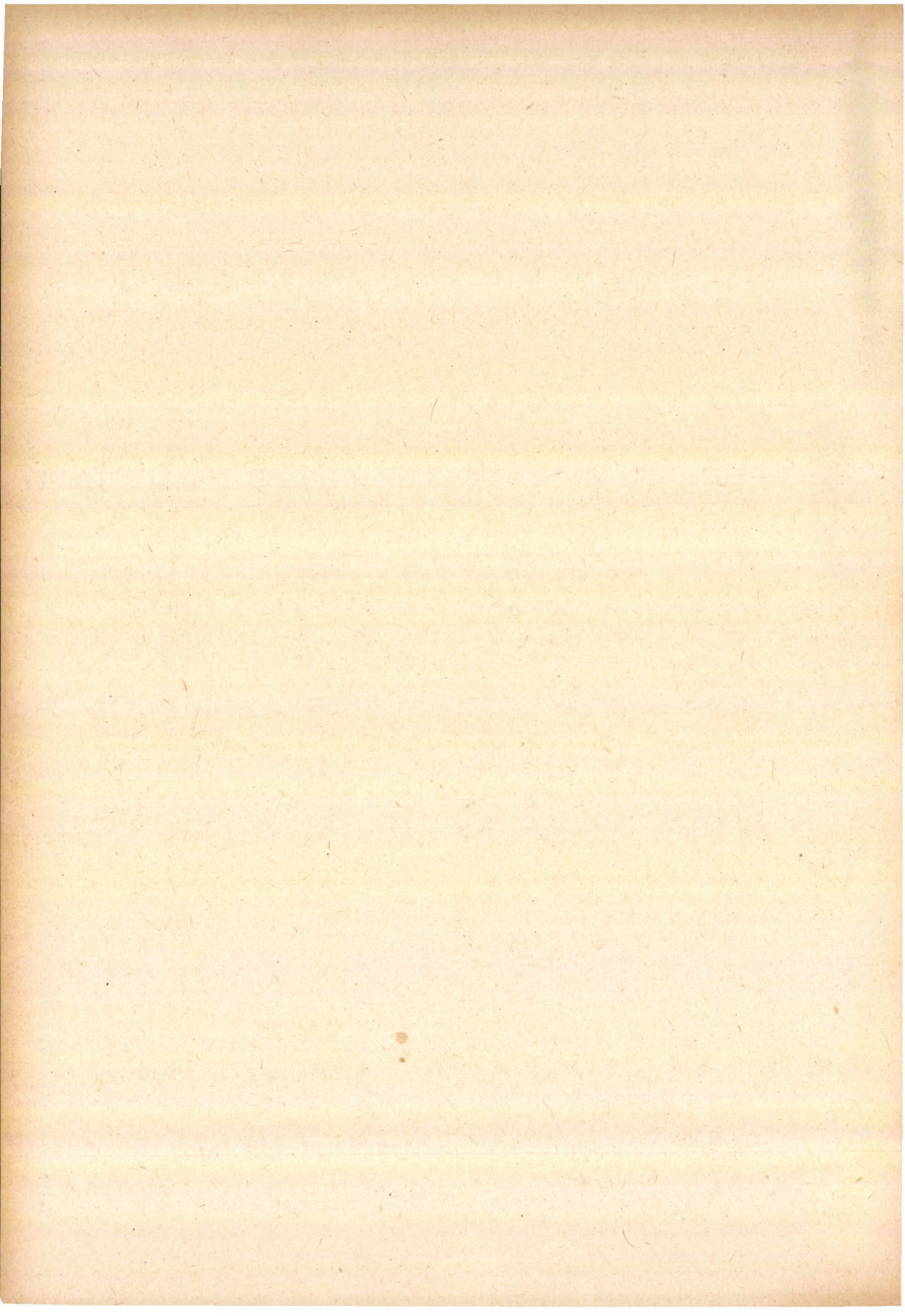
(k_1) дисперсия функции $K(x)$ конечна

(k_1) $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 - K(x)] x^{\gamma_3} = C$, где C положительное постоянное и $1 < \gamma_3 < 2$.

(k_2) $\lim_{x \rightarrow \infty} [1 - K(x)] x^{\gamma_3} = C$, где C положительное постоянное и $0 < \gamma_3 < 1$.

Покажем, что при этих предположениях существует асимптотическое распределение случайной величины $\nu_{\beta(t)}$. Число возможных предельных распределений 59.

Доказательство основывается на работах автора [6] и [7] и на теореме Р. Л. Добрушина [1].



EINE VERALLGEMEINERUNG DER LAPLACESCHEN METHODE

ANDRÁS BÉKÉSSY

1. §. Einführung

Es ist wohlbekannt, dass der asymptotische Wert des Integrals

$$(1) \quad F(x) = \int_0^a \exp \{ -x f(t) \} dt$$

für $x \rightarrow \infty$ mit dem asymptotischen Werte von

$$\int_0^a \exp \left\{ -\frac{1}{2} x f''(0) t^2 \right\} dt ,$$

— das heisst mit $\pi^{\frac{1}{2}} [2 x f''(0)]^{-\frac{1}{2}}$ — übereinstimmt, wenn x reell, positiv und $0 < a \leq \infty$ eine von x unabhängige Konstante ist, und ausserdem die Funktion $f(t)$ die folgenden Eigenschaften besitzt :

a° Die Funktion $\exp \{ -x f(t) \}$ ist in $[0, a]$ für genügend grosse Werte von x integrierbar.

b° Für jedes $\delta > 0$ ist

$$\inf_{\delta \leq t \leq a} f(t)$$

grösser als Null.

c° Die Funktion $f(t)$ ist im Punkte $t = 0$ von rechts stetig und zweimal differenzierbar, mit $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) > 0$.

Es ist ferner bekannt, dass die Bedingung c° durch die folgende, allgemeinere Bedingung ersetzt werden kann :

c'° Es sei für $t \rightarrow 0$

$$f(t) \sim C t^\alpha ,$$

wobei $C > 0$ und $\alpha > 0$ sind. In diesem Fall gilt die Formel

$$(2) \quad \int_0^a \exp \{ -x f(t) \} dt \sim \int_0^a \exp \{ -x C t^\alpha \} dt , \quad (x \rightarrow \infty) ,$$

das heisst

$$\int_0^a \exp \{-x f(t)\} dt \sim \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) (Cx)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Die asymptotische Gleichung (2) spielt eine zentrale Rolle bei der Laplaceschen Methode (Problem der »Funktionen grosser Zahlen«), oder bei der sogenannten Sattelpunktmethode, wo man die Aufgabe hat, den asymptotischen Wert von Integralen der Gestalt

$$\int_{(C)} h(z) \exp \{x f(z)\} dz$$

zu bestimmen.

Obgleich zahlreiche und verschiedenartige Verallgemeinerungen der Laplaceschen Methode in der Literatur vorhanden sind (für mehrfache Integrale, für zweiparametrische Integrale, u. s. w. siehe z. B. in der Arbeit von A. ERDÉLYI [1] das Literaturverzeichnis zum zweiten Kapitel, S. 57.), fand es meines Wissens keine derartige Untersuchung statt, in welcher hinreichende Bedingungen für das Bestehen einer Behauptung von Typus (2) für Funktionen aufgestellt worden wären, die asymptotisch nicht die Gestalt Ct^α , sondern z. B. die Gestalt $-Ct^\alpha \log t$ oder allgemeiner, irgendeine Gestalt $g(t)$ haben.

Für die Untersuchung solcher Fragen hat A. HAAR eine allgemeine Methode entwickelt [2], in seinem Artikel zeigt er nämlich, dass der asymptotische Wert eines Integrals der Gestalt (1) von den Singularitäten seiner Laplaceschen Transformierten abhängt, über den Fall $c'.$ geht er aber nicht hinaus und seine Methode scheint mir in allgemeineren Fällen nicht leicht anwendbar zu sein. Ebenso scheint derjenige Weg, welcher mit der Transformation des Integrals (1) in ein Laplace—Stieltjessche Integral der Gestalt

$$\int \exp \{-xs\} d\Omega(s)$$

beginnt und mit der Anwendung Abelschen Sätzen der Laplaceschen Transformation fortgesetzt wird, nicht einfacher zu sein. Jedenfalls beschränkt sich die nachstehende Untersuchung auf Sätze, die unmittelbar ohne diesen Hilfsmitteln erreicht werden können.

Um die Sätze kürzer zu fassen, sind hier einige — später als »die Grundbedingungen« genannte — Voraussetzungen aufgestellt:

1.° Es sei die Veränderliche x reel und positiv; es sei $0 < a \leq \infty$, übrigens sei a eine von x unabhängige Konstante.

2.° Es gebe ein $x_0 \geq 0$ derart, dass die Funktion $\exp \{-x f(t)\}$ im Intervall $0 \leq t \leq a$ für alle $x \geq x_0$ integrierbar ist.

3.° Es sei

$$\inf_{\delta \leq t \leq a} f(t)$$

für jede positive Konstante δ grösser als Null.

4° Es soll

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t)$$

existieren und gleich Null sein.

Das folgende Kapitel wirft die Frage auf, ob die Beziehung

$$(3) \quad \int_0^a \exp \{-x f(t)\} dt \sim \int_0^a \exp \{-x g(t)\} dt$$

für $x \rightarrow \infty$ aus $f(t) \sim g(t)$ (für $t \rightarrow +0$) gefolgert werden kann — was ja eine Verallgemeinerung der Beziehung (2) wäre —, wenn die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ bloss die Grundbedingungen befriedigen, wenn also die Funktion $g(t)$ nicht gleich Ct^a ist, sondern sie eine allgemeinere, nicht näher bestimmte Form hat. Da aber (3) sich im allgemeinen als falsch erweist, sind zusätzliche Bedingungen, die zusammen mit den Grundbedingungen zur Gültigkeit der Gleichung (3) hinreichen, für die Funktion $g(t)$ aufgestellt worden.

Danach wird gezeigt, dass es ausser den Funktionen von der asymptotischen Gestalt Ct^a noch weitere Klassen der Funktionen $f(t)$ gibt, für die man einen asymptotischen Wert des Integrals (1) explizit angeben kann.

2. §. Kriterien

Um zu zeigen, dass die Grundbedingungen 1°–4° für das Bestehen der Behauptung (3) nicht hinreichen, haben wir den folgenden einfachen, fast trivialen Hilfssatz nötig:

Hilfssatz 1. Wenn $f(t)$ den Grundbedingungen genügt, so sind — für Werte von x , die gross genug sind —, die folgenden Beziehungen gültig:

I. Falls $0 < \delta \leq a$ ist, so gibt es eine positive Zahl $\eta(\delta)$ derart, dass

$$\int_0^a \exp \{-x f(t)\} dt = O(\exp \{-x \eta(\delta)\})$$

gilt.

II. Falls $0 < \delta \leq a$ ist, so gilt die Limesrelation

$$\exp \{\varepsilon x\} \cdot \int_0^\delta \exp \{-x f(t)\} dt \rightarrow \infty$$

für $x \rightarrow \infty$ mit jedem $\varepsilon > 0$.

Nach den Grundbedingungen 2° und 3° bestehen nämlich die Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \int_0^a \exp \{-x f(t)\} dt &\leq \exp \left\{ -(x - x_0) \inf_{\delta \leq t \leq a} f(t) \right\} \cdot \int_0^a \exp \{-x_0 f(t)\} dt < \\ &< A \exp \left\{ -x \inf_{\delta \leq t \leq a} f(t) \right\}, \end{aligned}$$

wo A eine von x unabhängige Konstante ist; es folgt ferner aus der Grundbedingung 4°:

$$\exp\{\varepsilon x\} \int_0^\delta \exp\{-x f(t)\} dt = \int_0^\delta \exp\{[\varepsilon - f(t)]x\} dt > B \exp\left\{\frac{\varepsilon x}{2}\right\},$$

wobei der Wert der Konstante $B(\delta)$ von x nicht abhängt. Damit sind beide Teile des Hilfssatzes bewiesen.

Für $0 < b \leq a$ folgt

$$\int_0^a \exp\{-x f(t)\} dt \sim \int_0^b \exp\{-x f(t)\} dt, \quad (x \rightarrow \infty)$$

unmittelbar aus dem Hilfsatz.

Es sei nun $c > 1$; die Funktion $g(t)$ genüge den Grundbedingungen, es sei $f(t) = g(ct)$ und

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{g(ct)}{g(t)} = 1.$$

Es kann z. B. $g(t) = (-\log t)^{-1}$, $0 < a < 1$ gewählt werden. Somit erhält man

$$\int_0^{a/c} \exp\{-x f(t)\} dt = \frac{1}{c} \int_0^a \exp\{-x g(t)\} dt \sim \frac{1}{c} \int_0^{a/c} \exp\{-x g(t)\} dt,$$

die Beziehung (3) besteht also nicht.

Dieses Beispiel zeigt, dass man die Funktion $g(t)$, mit welcher $f(t)$ für $t \rightarrow +0$ asymptotisch ist, zur Gültigkeit der Relation (3) noch weiteren zusätzlichen Bedingungen unterwerfen muss.

Kriterium 1. Wenn die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ den Grundbedingungen genügen, zwischen ihnen die Relation $f(t) \sim g(t)$ für $t \rightarrow +0$ besteht, und ausserdem eine positive Konstante existiert, damit

$$(4) \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^a \exp\{-cxg(t)\} dt}{\int_0^a \exp\{-xg(t)\} dt} = M < \infty$$

ausfällt, so gilt die asymptotische Gleichung (3).

Beweis: Es sei $\sigma(t) = f(t)/g(t) - 1$. Nach der Voraussetzung $f(t) \sim g(t)$ ist $\lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) = 0$, daher findet man positive Zahlen δ_1 und λ derart, dass für jedes, der Bedingung $0 \leq t \leq \delta_1$ unterworfenen t die Ungleichung

$$1 - |\sigma(t)| > c(1 + \lambda)$$

gilt. Es sei nun $0 < \delta < \delta_1$. Mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\begin{aligned} \exp\{-x f(t)\} &= \\ &= \exp\{-x g(t)\} \cdot [1 - x g(t) \sigma(t) \cdot \exp\{-\vartheta x g(t) \sigma(t)\}] , \quad (0 \leq \vartheta(t) < 1) , \end{aligned}$$

erhält man nach elementaren Umformungen die Gleichung

$$(5) \quad \int_0^a \exp\{-x f(t)\} dt : \int_0^a \exp\{-x g(t)\} dt = 1 + R_1 + R_2 ,$$

wobei

$$|R_1| \leq \int_0^\delta x g(t) |\sigma(t)| \exp\{-x g(t) [1 - |\sigma(t)|]\} dt : \int_0^a \exp\{-x g(t)\} dt ,$$

und

$$|R_2| \leq \left(\int_\delta^a \exp\{-x g(t)\} dt + \int_\delta^a \exp\{-x f(t)\} dt \right) : \int_0^a \exp\{-x g(t)\} dt$$

ist. Da die Ungleichung

$$x g(t) < \frac{1}{\lambda c} \exp\{x \lambda c g(t)\}$$

für jeden λ, c, x und t besteht, ist auch

$$|R_1| < \sup_{0 \leq t \leq \delta} |\sigma(t)| \cdot \frac{2M}{\lambda c}$$

für genügend grosse Werte von x .

Wird nun eine beliebig kleine, positive Zahl ε gegeben, so wähle man die Zahl δ klein, dass $|R_1| < \varepsilon$ wird und dann x so gross, dass auch das Restglied $|R_2| < \varepsilon$ ausfällt, was wegen Hilfssatz 1. möglich ist. Somit ist die Behauptung bewiesen.

Kriterium 2. Wenn die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ den Grundbedingungen genügen, für $t \rightarrow +0$ die asymptotische Gleichung $f(t) \sim g(t)$ besteht, ausserdem eine solche positive Konstante $c < 1$ existiert, dass

$$(6) \quad \limsup_{t \rightarrow +0} \frac{g(ct)}{g(t)} < 1$$

ausfällt, so gilt auch die asymptotische Gleichung (3).

Beweis: Es wird gezeigt, dass die Funktion $g(t)$ dem Kriterium 1., (der Bedingung (4)) genügt. Nach Ungleichung (6) findet man solche Konstanten $0 < \delta < 1$ und $0 < \lambda < 1$, dass für jedes t im Intervall $0 \leq t \leq \delta$

$$g(ct) < \lambda g(t)$$

wird, so dass auch die Ungleichung

$$\int_0^a \exp\{-x g(t)\} dt > c \int_0^\delta \exp\{-\lambda x g(t)\} dt + \int_{\delta/c}^a \exp\{-x g(t)\} dt,$$

also

$$\int_0^\delta \exp\{-\lambda x g(t)\} dt : \int_0^a \exp\{-x g(t)\} dt < \frac{1}{c}$$

besteht und, mit Rücksicht auf den Hilfssatz 1., auch

$$\int_0^a \exp\{-\lambda x g(t)\} dt : \int_0^a \exp\{-x g(t)\} dt < \frac{1}{c} + o(1) < \infty$$

ist.

3. §. Der Fall regulär veränderlicher Funktionen

Wie im Fall $f(t) \sim Ct^\alpha$, ($t \rightarrow +0$, $\alpha > 0$), wo nebst der Gleichung (2) auch

$$\int_0^a \exp\{-x Ct^\alpha\} dt \sim \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) (Cx)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad (x \rightarrow \infty)$$

bekannt ist, so dass man den asymptotischen Wert der Funktion (1) explizit angeben kann, so kann der asymptotische Wert der Funktion (1) in diesem Sinne explizit angegeben werden, falls die Funktion $f(t)$ für $t \rightarrow +0$ asymptotisch gleich einer Funktion von der Gestalt $t^\alpha L(1/t)$ ist, wobei $L(s)$ zur Klasse der *langsam veränderlichen Funktionen* gehört.

Die Definition und Eigenschaften der langsam veränderlichen Funktionen sind in den Arbeiten von J. KARAMATA [3], [4] und von J. KOREVAAR, T. VAN AARDENNE-EHRENFEST und N.G. DE BRUIJN [5] angeführt, um aber bequemer zu zitieren, habe ich die später benutzten Eigenschaften kurz zusammengestellt:

Von einer für alle $s > 0$ definierten, positiven Funktion $L(s)$ sagt man, dass sie — im Sinne von KARAMATA — *langsam veränderlich* ist, oder dass sie *sich langsam verändert*, wenn für jede positive Konstante $c > 0$ der Grenzwert

$$(7) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{L(cs)}{L(s)}$$

existiert und gleich Eins ist.

A^2 Ist die Funktion $L(s)$ auf jedem Intervall $1 \leq s \leq A$ messbar, so existiert der Grenzwert (7) in jedem, von Null abgegrenzten geschlossenen Intervall $a \leq c \leq b$ gleichmässig (siehe [5]).

B° . Aus der vorigen Eigenschaft folgt, dass es eine Zahl s_0 zu jedem $\sigma > 0$ und $\varrho > 0$ derart gibt, dass die Ungleichungen

$$(8) \quad (1 - \varrho) \left(\frac{s_1}{s_2} \right)^\sigma < \frac{L(s_2)}{L(s_1)} < (1 + \varrho) \left(\frac{s_2}{s_1} \right)^\sigma$$

für jede $s_2 \geq s_1 \geq s_0$ gelten.

Ist nämlich $\sigma > 0$ und $\varrho > 0$ gegeben, so wählt man zuerst eine Zahl $c > 1$ beliebig, dann eine Zahl $\varrho_1 < \varrho$, damit

$$\frac{\log(1 + \varrho_1)}{\log c} < \sigma$$

wird, endlich ein s_0 derart, dass für jedes γ im Intervall $1 \leq \gamma \leq c$ und für jedes $s \geq s_0$

$$\frac{L(\gamma s)}{L(s)} < 1 + \varrho_1$$

ausfällt, was wegen der gleichmässigen Konvergenz des Quotienten möglich ist. Setzt man

$$s_2 = c^k s_1,$$

also

$$k = \frac{\log \frac{s_2}{s_1}}{\log c},$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{L(s_2)}{L(s_1)} &= \frac{L(c^k s_1)}{L(c^{k-1} s_1)} \cdot \frac{L(c^{k-1} s_1)}{L(c^{k-2} s_1)} \cdots \frac{L(c^{k-[k]} s_1)}{L(s_1)} < \\ &< (1 + \varrho_1)^{[k]+1} < (1 + \varrho) (1 + \varrho_1)^k = \\ &< (1 + \varrho) \left(\frac{s_2}{s_1} \right)^{\log(1 + \varrho_1)/\log c} < \left(\frac{s_2}{s_1} \right)^\sigma (1 + \varrho), \end{aligned}$$

was der erste Teil der Behauptung war. Die Abschätzung nach unten geht nach demselben Muster.

C° . Für jede positive Zahl α ist

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-\alpha} L(s) = 0.$$

Setzt man nämlich in der Gleichung (8) $s_2 = s$ und $\sigma = \alpha/2$, so entsteht

$$s^{-\alpha} L(s) < \frac{L(s_1)}{s_1^{\alpha/2}} (1 + \varrho) \cdot s^{-\alpha/2}, \quad (s \geq s_1 \geq s_0),$$

woraus die Behauptung folgt.

D° . Falls $\alpha > 1$ ist, so ist die Funktion

$$L^*(s) = s^\alpha \sup_{s \leq \tau \leq \infty} \tau^{-\alpha} L(\tau)$$

für $s \rightarrow \infty$ asymptotisch gleich $L(s)$.

Für jedes $\varrho > 0$ und $s > 0$ gibt es nämlich eine Zahl $c_s \geq 1$ derart, dass

$$s^{-\alpha} L^*(s) = \sup_{s \leq \tau \leq \infty} \tau^{-\alpha} L(\tau) \leq (s c_s)^{-\alpha} L(s c_s) \cdot (1 + \varrho)$$

gilt, daher erhält man

$$1 \leq \frac{L^*(s)}{L(s)} \leq \frac{1}{c_s^\alpha} (1 + \varrho) \frac{L(s c_s)}{L(s)},$$

da offensichtlich $L^*(s) \geq L(s)$ ist. Aus (8) folgt aber für jedes $s \geq s_0$ auch die Ungleichung

$$\frac{L(s c_s)}{L(s)} < c_s^\alpha (1 + \varrho),$$

so dass für genügend grosse s Werte

$$1 \leq \frac{L^*(s)}{L(s)} \leq (1 + \varrho)^2$$

ist, wie klein auch ϱ sein mag, und somit ist die Behauptung bewiesen.

Der Kürze halber führen wir den folgenden Begriff ein: Die Funktion $q(s)$ heisse für $s \rightarrow \infty$ *schnell veränderlich*, wenn sie positiv ist, und die Grenzwertrelationen

$$(9) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{q(cs)}{q(s)} = \begin{cases} \infty & \text{für } c < 1, \\ 1 & \text{für } c = 1, \\ 0 & \text{für } c > 1 \end{cases}$$

gelten, sie heisse jedoch für $s \rightarrow +0$ *schnell veränderlich*, falls

$$(10) \quad \lim_{s \rightarrow +0} \frac{q(cs)}{q(s)} = \begin{cases} 0 & \text{für } c < 1, \\ 1 & \text{für } c = 1, \\ \infty & \text{für } c > 1 \end{cases}$$

besteht.

Satz 1. Wenn die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ die Grundbedingungen befriedigen, $f(t)$ für $t \rightarrow +0$ asymptotisch gleich $g(t)$ ist, endlich die Funktion $g(t)$ die Gestalt

$$(11) \quad g(t) = t^\alpha L\left(\frac{1}{t}\right)$$

hat, wobei die Funktion $L(s)$ (für $s \rightarrow \infty$) sich langsam verändert, so gilt die asymptotische Formel

$$(12) \quad F(x) = \int_0^a \exp\{-x f(t)\} dt \sim \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \cdot t(x), \quad (x \rightarrow \infty),$$

wobei $t(x)$ die inverse Funktion von

$$(13) \quad x(t) = \frac{1}{\sup_{0 \leq \tau \leq t} \tau^\alpha L\left(\frac{1}{\tau}\right)}.$$

ist.

Beweis: Aus der Grundbedingung 2. folgt, dass die Funktion $g(t)$ messbar ist, so dass $L(s)$ die vorher aufgezählten Eigenschaften der langsam veränderlichen Funktionen besitzt. Aus der Gestalt (11) der Funktion $g(t)$ ist es klar, dass sie dem Kriterium 2. genügt, daher besteht auch die asymptotische Gleichung (3). Da aus der Eigenschaft D° der langsam veränderlichen Funktionen folgt, dass

$$t^{-\alpha} g(t) \sim t^{-\alpha} \sup_{0 \leq \tau \leq t} \tau^\alpha L\left(\frac{1}{\tau}\right) = L^*\left(\frac{1}{t}\right)$$

für $t \rightarrow +0$ ist, genügt es den Beweis für den Fall $g(t) = t^\alpha L^*(1/t)$ durchzuführen, also nur die Beziehung

$$\int_0^\delta \exp\left\{-x t^\alpha L^*\left(\frac{1}{t}\right)\right\} dt \sim \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) t(x), \quad (x \rightarrow \infty)$$

zu beweisen und dabei kann die Zahl δ nach Korollar des Hilfssatz 1. beliebig klein gewählt werden. Man wählt daher δ so klein, dass $\delta^{-1} \leq s_0$ für $\sigma = \alpha/2$ und $\varrho = \frac{1}{2}$ wird, wobei unter s_0 , σ und ϱ die bei der Eigenschaft B° der langsam veränderlichen Funktionen vorgekommen Konstanten zu verstehen sind.

Die Funktion $t^\alpha L^*(1/t)$ strebt von rechts monoton gegen Null, so dass man zu jedem Werte des Veränderlichen x — wenn er nur gross genug ist — eine Zahl $t(x) > 0$ findet, für die

$$x = \frac{1}{t(x)^\alpha L^*\left(\frac{1}{t(x)}\right)}$$

ist, setzt man daher $t = rt(x)$, so entsteht

$$\int_0^\delta \exp\left\{-x t^\alpha L^*\left(\frac{1}{t}\right)\right\} dt = t(x) \int_0^{\delta/t(x)} \exp\left\{-r^\alpha \frac{L^*\left(\frac{1}{rt(x)}\right)}{L^*\left(\frac{1}{t(x)}\right)}\right\} dr = t(x) \cdot I\{t(x)\}.$$

Zum Beweis des Satzes 1. hat man noch zu zeigen, dass

$$(14) \quad I\{t(x)\} = \int_0^{\delta/t(x)} \exp \left\{ -r^\alpha \frac{L^*\left(\frac{1}{rt(x)}\right)}{L^*\left(\frac{1}{t(x)}\right)} \right\} dr \rightarrow \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right),$$

falls $t(x) \rightarrow 0$ konvergiert, — das heisst $x \rightarrow \infty$ strebt. Zerlegt man das Integral $I\{t(x)\}$ in drei Teile:

$$I\{t(x)\} = \int_0^A + \int_A^B + \int_B^{\delta/t(x)} = I_1 + I_2 + I_3,$$

so ist ersichtlich, dass das Integral I_2 wegen der gleichmässigen Konvergenz des Integranden (siehe Eigenschaft $A^?$) gegen

$$\int_A^B \exp\{-r^\alpha\} dr$$

strebt und

$$I_1 \leq A$$

ist. Was das Restglied I_3 betrifft, nach der Eigenschaft $B^?$ und nach Wahl der Zahl δ — für geeignet kleines $t(x)$ —, gilt die Abschätzung

$$I_3 = \int_B^{\delta/t(x)} \exp \left\{ -r^\alpha \frac{L\left(\frac{1}{rt(x)}\right)}{L\left(\frac{1}{t(x)}\right)} \right\} dr < \int_B^\infty \exp \left\{ -\frac{1}{2} r^{\frac{\alpha}{2}} \right\} dr.$$

Ist daher ein $\varepsilon > 0$ gegeben, so wählt man zuerst die Zahlen A und B derart, damit erstens $I_1 < \varepsilon$, zweitens

$$\int_B^\infty \exp \left\{ -\frac{1}{2} r^{\alpha/2} \right\} dr < \varepsilon,$$

drittens

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \int_A^B \exp\{-r^\alpha\} dr < \varepsilon$$

wird, dann $t(x)$ so klein, dass $[\delta/t(x)] > B$ und

$$\left| I_2 - \int_A^B \exp\{-r^\alpha\} dr \right| < \varepsilon$$

ausfällt. Dadurch ist aber die Behauptung (14) und somit der Satz 1. bewiesen.

Bemerkung: Ist in der Gleichung (10) $\alpha = 0$, ist also $g(t)$ selbst eine langsam veränderliche Funktion, so gilt der Satz 1. natürlich nicht, es erhebt sich doch die Frage, wie sich in diesem Fall das Integral (1) asymptotisch verhält. Eine elementare, aber recht umständliche Rechnung zeigt zwar, dass z. B. unter der Annahme

$$f(t) = \left[\left(\log \frac{1}{t} \right)^{\alpha_1} \left(\log \log \frac{1}{t} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\log_{(k)} \frac{1}{t} \right)^{\alpha_k} \right]^{-1},$$

wobei die erste, nicht-verschwindende α_i positiv sein soll, für $\log_{(k)} \frac{1}{t} > 0$ die asymptotische Gleichung

$$\int_0^x \exp \{-x f(t)\} dt \sim \sqrt{\frac{2\pi u(x)}{A\{u(x)\} + 1}} \exp \left\{ -u(x) - \frac{u(x)}{A\{u(x)\}} \right\}$$

besteht, wo

$$A\{u\} = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\log u} + \frac{\alpha_3}{\log u \log \log u} + \dots + \frac{\alpha_k}{\log u \log \log u \dots \log_{(k)}(u)}$$

ist und $u(x)$ die inverse Funktion von

$$x = u \cdot \frac{u^{\alpha_1} (\log u)^{\alpha_2} \dots (\log_{(k-1)} u)^{\alpha_k}}{A(u)}$$

bedeutet, aber ein allgemeineres, für jede langsam veränderliche Funktion gültiges Resultat habe ich nicht erhalten können.

Für die langsam veränderlichen Funktionen im allgemeinen kann ein asymptotischer Wert des Integrals (1) nach der Methode des Satzes 1. nicht angegeben werden, es lässt sich dagegen ein einfaches Resultat »nach der anderen Seite hin« also für den »schnell veränderlichen Funktionen« [vgl. (10)] durch dieselbe Methode erreicht werden.

Satz 2. Wenn die Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ die Grundbedingungen befriedigen, für $t \rightarrow +0$ $f(t) \sim g(t)$ ist, die Funktion $g(t)$ monoton anwächst und für $t \rightarrow +0$ schnell veränderlich ist, so gilt die asymptotische Formel

$$(15) \quad \int_0^x \exp \{-x f(t)\} dt \sim t(x), \quad (x \rightarrow \infty),$$

wobei $t(x)$ die inverse Funktion von

$$(16) \quad x = \frac{1}{g(t)}$$

bedeutet.

Beweis: Erstens bemerkt man, dass nach den Voraussetzungen des Satzes die Funktion $g(t)$ dem Kriterium 2. genügt, zweitens, dass die Limesbeziehung (9) wegen der vorausgesetzten Monotonie der Funktion $g(t)$ gleichmässig in jedem vom Punkte $c=1$ abgegrenzten (aber nach 0 und ∞ vielleicht offenen) Intervall besteht, so dass der Beweis ganz nach dem Muster des Satzes 1. geführt werden kann.

Satz 3. Die Funktion $f(t)$ sei den Grundbedingungen unterworfen und es sei

$$F(x) = \int_0^a \exp \{-x f(t)\} dt.$$

Ist $\alpha > 0$ und die Funktion $t^{-\alpha} f(t)$ langsam veränderlich, so ist auch $x^{\frac{1}{\alpha}} F(x)$ langsam veränderlich. Ist α gleich Null, so verändert sich die Funktion $F(x)$ für $x \rightarrow \infty$ schnell. Ist dagegen $f(t)$ eine für $t \rightarrow +0$ schnell veränderliche Funktion, so verändert sich $F(x)$ langsam.

Beweis: Es sei $t^{-\alpha} f(t) = L(1/t)$ eine langsam veränderliche Funktion. Betrachtet man die Funktion

$$\frac{(cx)^{\frac{1}{\alpha}} F(cx)}{x^{\frac{1}{\alpha}} F(x)} = \frac{c^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^a \exp \left\{ -cx t^{\alpha} L \left(\frac{1}{t} \right) \right\} dt}{\int_0^a \exp \left\{ -x t^{\alpha} L \left(\frac{1}{t} \right) \right\} dt}$$

und wird $c^{1/\alpha} t = \tau$ gesetzt, so ist

$$(17) \quad \frac{(cx)^{\frac{1}{\alpha}} F(cx)}{x^{\frac{1}{\alpha}} F(x)} = \frac{\int_0^{ac^{1/\alpha}} \exp \left\{ -x \tau^{\alpha} L \left(\frac{c^{1/\alpha}}{\tau} \right) \right\} d\tau}{\int_0^a \exp \left\{ -x t^{\alpha} L \left(\frac{1}{t} \right) \right\} dt},$$

aber nach dem Hilfssatz 1. und dem Kriterium 2. ist die rechte Seite der Gleichung (17) für $x \rightarrow \infty$ asymptotisch gleich Eins, was die erste Behauptung des Satzes ist.

Wenn α gleich Null ist, so betrachte man die Funktion

$$F(x) = \int_0^a \exp \left\{ -x L \left(\frac{1}{t} \right) \right\} dt.$$

Es genügt die Gleichung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(cx)}{F(x)} = 0$$

für Zahlen c , die grösser als Eins sind, zu beweisen.

Es seien $\varepsilon > 0$ und $c > 1$ beliebig gegeben. Es gibt nun ein Intervall $0 \leq t \leq \delta$, für welches $L(\varepsilon/t) : L(1/t) \leq c$ ist, es gilt ja

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{L\left(\frac{\varepsilon}{t}\right)}{L\left(\frac{1}{t}\right)} = 1,$$

daher wird nach Hilfssatz 1.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^a \exp \left\{ -x L\left(\frac{1}{t}\right) \right\} dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{a\varepsilon} \exp \left\{ -x L\left(\frac{\varepsilon}{t}\right) \right\} dt > \\ &> \frac{1}{\varepsilon} \left[\int_0^\delta \exp \left\{ -cx L\left(\frac{1}{t}\right) \right\} dt + \int_\delta^{a\varepsilon} \exp \left\{ -x L\left(\frac{\varepsilon}{t}\right) \right\} dt \right] \leq \\ &> \frac{1}{\varepsilon} [F(cx) + O(e^{-x\eta})] \end{aligned}$$

für $x \rightarrow \infty$, dabei hängt $\eta > 0$ von δ, ε und c , aber nicht von x ab, so dass man wieder mit Benutzung des Hilfssatzes 1. die Ungleichung

$$\frac{F(cx)}{F(x)} < \varepsilon + o(1) \quad (x \rightarrow \infty)$$

erhält, was die zweite Behauptung beweist.

Was die dritte Behauptung betrifft, es genügt die Gleichung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(cx)}{F(x)} = 1$$

ähnlich wie vorher, nur für jedes $c > 1$ zu beweisen. Zuerst wählt man die Zahlen $\varepsilon > 0$ und $c > 1$ beliebig, dann eine Zahl p so, damit

$$\frac{1}{1-\varepsilon} > p > 1$$

wird, endlich eine Zahl δ derart, dass für jedes t im Intervall $0 \leq t \leq \delta$ die Ungleichung

$$\frac{f(pt)}{f(t)} > c \text{ und } \delta p \leq a$$

ausfällt, was wegen der Beziehung

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(pt)}{f(t)} = \infty$$

möglich ist. Nach Wahl der erwähnten Konstanten gilt für genügend grosse Werten von x die Ungleichung

$$\int_0^{\delta p} \exp \{-x f(t)\} dt = p \int_0^{\delta} \exp \{-x f(pt)\} dt < p \int_0^{\delta} \exp \{-c x f(t)\} dt ,$$

es ist also wegen Hilfsatz 1. für $x \rightarrow \infty$

$$\frac{F(cx)}{F(x)} > \frac{1}{p} - o(1) > 1 - \varepsilon - o(1) .$$

Da der Quotient $F(cx)/F(x)$ für jedes $x > 0$ und für jedes $c > 1$ gewiss kleiner als Eins ist, wurde die Behauptung und damit alle drei Teile des Satzes 3. bewiesen.

Es gibt Fälle, bei denen die Funktion $t(x)$ [siehe (11) und (12)] sich asymptotisch elementar, mit Hilfe der Funktion $g(t)$ [ohne Benutzung inverser Funktionen ausdrücken lässt, bei denen also ein asymptotischer Wert des Integrals $F(x)$ (11), welcher sozusagen »noch mehr explizit« ist, angegeben werden kann. Dies ermöglicht der folgende Hilfsatz.

Hilfssatz 2. Es sei $L(s)$ eine langsam veränderliche Funktion, die für genügend grosse Werte von s auch monoton ist. Wenn der Grenzwert

$$(18) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{L(s[L(s)]^{-1/a})}{L(s)}$$

existiert und gleich Eins ist, bzw. die schwächere Bedingung

$$(19) \quad 0 < \lim_{s \rightarrow \infty} \sup \inf \frac{L(s[L(s)]^{-1/a})}{L(s)} < \infty$$

erfüllt wird, so ist die inverse Funktion von

$$(20) \quad x = \frac{s^a}{L(s)}$$

für $x \rightarrow \infty$ asymptotisch gleich

$$(21) \quad [x L(x^{1/a})]^{1/a} ,$$

bzw.

$$(22) \quad x L([x L(x^{1/a})]^{1/a}) .$$

Der Beweis ist sehr einfach ; man bildet die Iterationsfolge

$$\begin{aligned} s_1(x) &= x^{1/a} , \\ s_{k+1}(x) &= x^{1/a} L(s_k(x)) , \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots) .$$

Sind nun die Quotienten $s_2(x)/s(x)$ bzw. $s_3(x)/s(x)$ gebildet und sucht man Bedingungen, unter denen diese Quotienten für $x \rightarrow \infty$ gegen Eins streben, so erweisen sich die Bedingungen (18) bzw. (19) als hinreichend.

Falls die Bedingung (18) oder (19) erfüllt wird, so lässt sich der Satz 1. durch Hilfssatz 2. ergänzen. Ist z. B. für $t \rightarrow +0$

$$(23) \quad f(t) \sim t^a \left(\log \frac{1}{t} \right)^{\beta_1} \left(\log \log \frac{1}{t} \right)^{\beta_2} \dots \left(\log_{(k)} \frac{1}{t} \right)^{\beta_k},$$

wobei $a > 0$ ist, so kann der Hilfssatz 2. angewendet werden, und für $\log_{(k)} 1/a > 0$ erhält man

$$(24) \quad \int_0^a \exp \{-xf(t)\} dt \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \cdot \alpha^{\beta_1/a}}{[x(\log x)^{\beta_1} (\log \log x)^{\beta_2} \dots (\log_{(k)} x)^{\beta_k}]^{\frac{1}{a}}}.$$

Als zweites Beispiel sei

$$f(t) \sim t^a \exp \left\{ - \sqrt{\log \frac{1}{t}} \right\}. \quad (a > 0).$$

Die Bedingung (19) ist befriedigt, daher gilt für jedes $a < 1$

$$\int_0^a \exp \{-xf(t)\} dt \sim \Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) \exp \left\{ - \frac{1}{2\alpha^2} \right\} x^{-\frac{1}{a}} \exp \left\{ \frac{\sqrt{\log x}}{\alpha^{3/2}} \right\}.$$

Wenn sich die Funktion $g(t)$ für $t \rightarrow +0$ schnell verändert, so hat man zwar keinen Anhaltspunkt, mit dessen Hilfe ein dem Hilfssatz 2. ähnliches, mehr oder weniger allgemeines Resultat könnte erreicht werden, es gibt jedoch spezielle Fälle, bei welchen eine im Sinne des Hilfssatzes 2. explizite Darstellung der inversen Funktion möglich ist. Es sei z. B. für $t \rightarrow +0$

$$f(t) \sim \exp \{-h(t)\},$$

wobei die Funktion $h(t)$ für $t \rightarrow +0$ asymptotisch gleich $Ct^{-\alpha}$ ($C > 0, \alpha > 0$) ist. Unter dieser Annahme ist die Funktion $f(t)$ für $t \rightarrow +0$ eine schnell veränderliche, nach Satz 2. besteht daher für $x \rightarrow \infty$ die asymptotische Gleichung

$$\int_0^a \exp \{-xf(t)\} dt \sim t(x) \quad (x \rightarrow \infty),$$

wobei $t(x)$ die inverse Funktion von

$$x = \exp h(t)$$

bedeutet. Setzt man

$$t_1(x) = \left(\frac{C}{\log x} \right)^a,$$

so ergibt sich, dass der Quotient $t_1(x)/t(x)$ für $x \rightarrow \infty$ gegen 1 strebt, so dass für $x \rightarrow \infty$ die Relation

$$\int_0^a \exp \{ -xf(t) \} dt \sim \int_0^a \exp \{ -x \exp \{ -h(t) \} \} dt \sim C^a (\log x)^{-a}$$

als Endergebnis erhalten wird.

(Eingegangen: 25. VI. 1957.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] ERDÉLYI, A.: *Asymptotic expansions*. Dover, New-York, 1956.
- [2] HAAR, A.: „Über asymptotische Entwicklungen von Funktionen”. *Mathematische Annalen* **96** (1927) 69–107.
- [3] KARAMATA, J.: „Sur un mode de croissance régulière des fonctions”. *Mathematica (Cluj)* **4** (1930) 38–53.
- [4] KARAMATA, J.: „Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamentaux”. *Bulletin de la Société Mathématique de France* **61** (1933) 1–8.
- [5] KOREVAAR, J.—VAN AARDENNE-ÉHRENFEST, T.—DE BRUIJN, N. G.: „A note on slowly oscillating functions.” *Nieuw Archief voor Wiskunde* **23** (1949) 77–86

A LAPLACE-MÓDSZER EGY ÁLTALÁNOSÍTÁSA

BÉKÉSSY A.

Kivonat

Ha x valós, pozitív, $0 < a \leq \infty$, a független x -től, $f(t)$ valós függvény és $a^\circ \exp \{ -xf(t) \}$ a $[0, a]$ intervallumban x elég nagy értékeire integrálható,

b $^\circ$ minden pozitív δ számmal $\inf_{\delta \leq t \leq a} f(t) > 0$,

c $^\circ$ $f(t) \sim Ct^a$, ha $t \rightarrow +0$ és $C > 0$, $a > 0$, akkor, mint ismeretes,

$$(1) \quad F(x) = \int_0^a \exp \{ -xf(t) \} dt \sim \int_0^a \exp \{ -x Ct^a \} dt, \quad (x \rightarrow \infty).$$

azaz

$$(2) \quad F(x) \sim \Gamma \left(1 + \frac{1}{a} \right) (Cx)^{-1/a}.$$

Kérdés, hogy az (1) típusú összefüggés igaz marad-e, ha $f(t)$ a $t = 0$ pontra vonatkozólag nem Ct^a alakú függvénnyel aszimptotikus, hanem általában

valamilyen, az a° és b° feltételt kielégítő függvénnyel; másszóval, ha c° helyébe az általánosabb $f(t) \sim g(t)$ feltétel kerül, akkor igaz marad-e, hogy

$$(3) \quad \int_0^a \exp\{-xf(t)\} dt \sim \int_0^a \exp\{-xg(t)\} dt \quad (x \rightarrow \infty).$$

Ellenpélda mutatja, hogy nem.

Ezzel szemben, ha $g(t)$ az a° és b° feltételen kívül még a dolgozatban kritériumoknak nevezett feltételek egyikét is kielégíti, akkor (3), az (1) összefüggés plauzibilis általánosítása, igaz marad. E kritériumok:

1. kritérium. Legyen olyan pozitív $c < 1$ szám, hogy

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sup_0^a \frac{\int_0^a \exp\{-cxg(t)\} dt}{\int_0^a \exp\{-xg(t)\} dt} < \infty.$$

2. kritérium. Legyen olyan $c < 1$, hogy

$$(6) \quad \lim_{t \rightarrow +0} \sup \frac{g(ct)}{g(t)} < 1.$$

A 3. fejezet a (2) típusú egyenlőség általánosításával foglalkozik.

1. tétel: Ha $f(t)$ és $g(t)$ kielégítik az a° és b° feltételt, $f(t) \sim g(t)$, $(t \rightarrow +0)$ és $g(t) = t^\alpha L(1/t)$, ahol $\alpha > 0$ és $L(1/t)$ lassan változó függvény (lásd: [4], [5]), akkor

$$F(x) = \int_0^a \exp\{-xf(t)\} dt \sim \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) t(x), \quad (x \rightarrow \infty),$$

ahol $t(x)$ az

$$x(t) = \frac{1}{\sup_{0 \leq \tau \leq t} \tau^\alpha L\left(\frac{1}{\tau}\right)}$$

függvény inverze.

2. tétel: Ha $f(t)$ és $g(t)$ kielégíti az a° és b° feltételt, $f(t) \sim g(t)$ $(t \rightarrow +0)$, $g(t)$ monoton és eleget tesz az alábbi feltételeknek:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{g(ct)}{g(t)} = \begin{cases} 0, & \text{ha } c < 1, \\ 1, & \text{ha } c = 1, \\ \infty, & \text{ha } c > 1 \end{cases}$$

(»gyorsan változó függvény«), akkor

$$\int_0^a \exp\{-xf(t)\} dt \sim t(x)$$

ahol $t(x)$ az

$$x(t) = \frac{1}{g(t)}$$

függvény inverze.

Egy speciális példa vonatkozik az 1. tétel feltételeit ki nem elégítő $\alpha = 0$ esetre, másszóval arra az esetre, ha $g(t)$ maga lassan változó függvény.

3. tétel: Legyen

$$F(x) = \int_0^a \exp\{-xf(t)\} dt,$$

$f(t)$ elégítse ki az a° és b° feltételt. Ha $f(t)$ lassan változó, $L(1/t)$ alakú függvény, akkor $F(x)$ a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(cx)}{F(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{ha } c < 1 \\ 1, & \text{ha } c = 1 \\ 0, & \text{ha } c > 1 \end{cases}$$

relációkat kielégítő, »gyorsan változó«-nak nevezett függvény. Ha $t^{-\alpha}f(t)$ ($\alpha > 0$) lassan változó, akkor $x^{1/\alpha}F(x)$ is lassan változó. Végül ha $f(t)$ gyorsan változó, akkor $F(x)$ változik lassan.

Az 1. tétel egyes esetekben kiegészíthető a 2. segédtétel eredményével, amely szerint, ha az $L(s)$ lassan változó függvény monoton és

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{L(s[L(s)]^{-1/\alpha})}{L(s)} = 1,$$

vagy legalábbis

$$0 < \lim_{s \rightarrow \infty} \sup \frac{L(s[L(s)]^{-1/\alpha})}{L(s)} < \infty,$$

akkor az

$$x = \frac{s^\alpha}{L(s)}$$

függvény inverz függvénye aszimptotikusan egyenlő az

$$[xL(x^\alpha)]^{1/\alpha},$$

illetőleg az

$$[x L([x L(x^{\frac{1}{a}})]^{\frac{1}{a}})]^{\frac{1}{a}}$$

kifejezéssel. Így például ha

$$f(t) \sim t^{\alpha} \left(\log \frac{1}{t} \right)^{\beta_1} \left(\log \log \frac{1}{t} \right)^{\beta_2} \dots \left(\log_{(k)} \frac{1}{t} \right)^{\beta_k}, \quad (\alpha > 0)$$

akkor $\log_{(k)} \frac{1}{a} > 0$ esetében

$$\int_0^a \exp \{-x f(t)\} dt \sim \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \alpha^{\frac{\beta_1}{\alpha}}}{[x(\log x)^{\beta_1} (\log \log x)^{\beta_2} \dots (\log_{(k)} x)^{\beta_k}]^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА LAPLACE-A

A. BÉKÉSSY

Резюме

Если x вещественна и положительна, $0 < a \leq \infty$, а не зависит от x , $f(t)$ вещественная функция и

a° : $\exp \{-x f(t)\}$ в интервале $[0, a]$ при достаточно больших значениях x интегрируема,

b° : с любым положительным числом $\delta \inf_{\delta \leq t \leq a} f(t) > 0$

c° : $f(t) \sim Ct^{\alpha}$, если $t \rightarrow +0$ и $C > 0, \alpha > 0$, тогда, как известно,

$$(1) \quad F(x) = \int_0^a \exp \{-x f(t)\} dt \sim \int_0^a \exp \{-x Ct^{\alpha}\} dt, \quad (x \rightarrow \infty)$$

т. е.

$$(2) \quad F(x) \sim \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) (Cx)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Спрашивается, что соотношение типа (1) будет ли иметь место, если $f(t)$ в точке $t = 0$ асимптотически равна не функции вида Ct^{α} , а, вообще, какой-нибудь функции, удовлетворяющей условиям a° и b° , т. е. если вместо условия c° выполняется более общее условие $f(t) \sim g(t)$, остаётся ли справедливым, что

$$(3) \quad \int_0^a \exp \{-x f(t)\} dt \sim \int_0^a \exp \{-x g(t)\} dt, \quad (x \rightarrow \infty).$$

На примере можно показать, что нет.

Но если $g(t)$ кроме условия a° и b° удовлетворяет одному из приведённых ниже критериев, то (3), очевидное обобщение соотношения (1), остаётся в силе. Эти условия таковы

Критерий. 1. Пусть существует такое положительное число $c < 1$, что

$$(4) \quad \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^a \exp \{-cxg(t)\} dt}{\int_0^a \exp \{-xg(t)\} dt} = M < \infty ,$$

Критерий. 2. Пусть существует такое $c < 1$, что

$$(6) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{g(ct)}{g(t)} < 1 .$$

Третья глава занимается обобщением равенства типа (2).

Теорема 1. Если $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям a° и b° , $f(t) \sim g(t)$ ($t \rightarrow +0$), и $g(t) = t^\alpha L(1/t)$, где $\alpha > 0$ и $L(s)$ медленно изменяющаяся функция, то

$$F(x) = \int_0^a \exp \{-xf(t)\} dt \sim \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) t(x) \quad (x \rightarrow \infty) ,$$

где $t(x)$ функция обратная функции

$$x(t) = \left[\sup_{0 \leq \tau \leq t} \tau^\alpha L\left(\frac{1}{\tau}\right) \right]^{-1} .$$

Теорема 2. Если $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям a° и b° , $f(t) \sim g(t)$, ($t \rightarrow +0$), $g(t)$ монотонна и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{g(ct)}{g(t)} = \begin{cases} 0, & \text{если } c < 1 \\ 1, & \text{если } c = 1 \\ \infty, & \text{если } c > 1 \end{cases}$$

(«быстро изменяющаяся функция»), то

$$\int_0^1 \exp \{-xf(t)\} dt \sim t(x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

где $t(x)$ функция, обратная функции

$$x(t) = [g(t)]^{-1}$$

Специальный пример относится к случаю $\alpha = 0$, не удовлетворяющему условиям теоремы 1., т. е. к случаю, когда $f(t)$ медленно изменяется.

Теорема 3. Пусть

$$F(x) = \int_0^a \exp \{-xf(t)\} dt,$$

$f(t)$ удовлетворяет условиям a° и b° . Если $f(t)$ медленно изменяющаяся функция типа $L(1/t)$, то $F(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(cx)}{F(x)} = \begin{cases} \infty, & \text{если } c < 1, \\ 1, & \text{если } c = 1, \\ 0, & \text{если } c > 1, \end{cases}$$

«быстро изменяющаяся» функция. Если $t^{-\alpha} f(t)$ медленно изменяется, то $x^{1/\alpha} F(x)$ также медленно изменяется. Наконец, если $f(t)$ быстро изменяется, то $F(x)$ изменяется медленно.

Теорема 1. в некоторых случаях может быть дополнена результатами леммы 2., согласно которой, если медленно изменяющаяся функция $L(s)$ монотонна и

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{L(s [L(s)]^{-1/\alpha})}{L(s)} = 1$$

или, по крайней мере,

$$0 < \liminf \frac{\sup L(s [L(s)]^{-1/\alpha})}{L(s)} < \infty$$

то функция, обратная функции

$$x = \frac{s^\alpha}{L(s)}$$

асимптотически равна выражению

$$[x L(x^{1/\alpha})]^{1/\alpha}$$

или соответственно

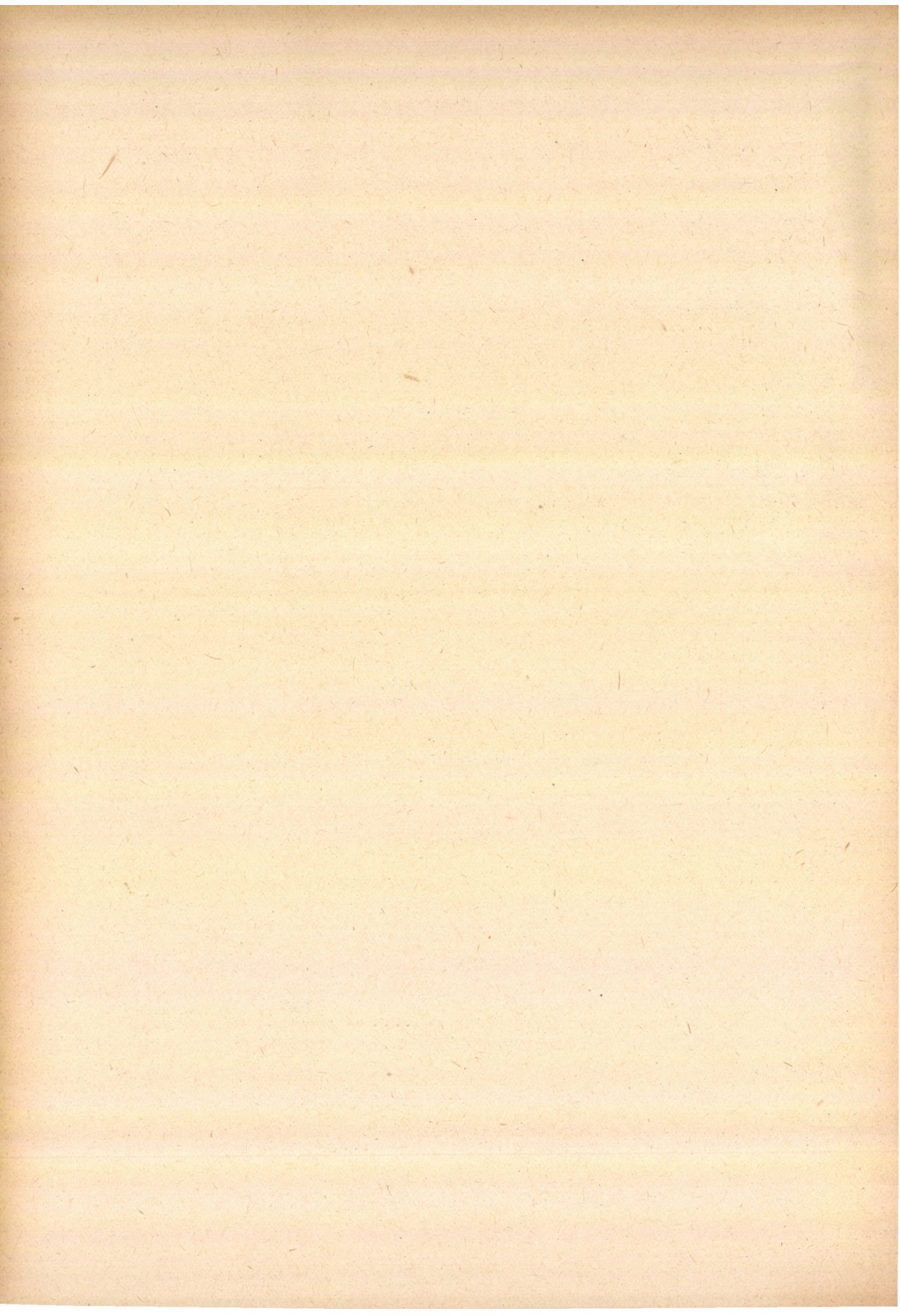
$$[x L([x L(x^{1/\alpha})]^{1/\alpha})]^{1/\alpha}.$$

Так, например, если

$$f(t) \sim t^\alpha \left(\log \frac{1}{t} \right)^{\beta_1} \left(\log \log \frac{1}{t} \right)^{\beta_2} \dots \left(\log_{(k)} \frac{1}{t} \right)^{\beta_k},$$

($\alpha > 0$), то

$$\int_0^a \exp \{-xf(t)\} dt \sim \frac{\Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right) \alpha^{\frac{\beta_1}{\alpha}}}{[x (\log x)^{\beta_1} (\log \log x)^{\beta_2} \dots (\log_{(k)} x)^{\beta_k}]^{1/\alpha}}.$$



LINEÁRIS DIFFERENCIÁL- ÉS DIFFERENCIAEGYENLETEK ÁLTALÁNOS KEZDETI FELTÉTELEKET KIELÉGÍTŐ EXPLICIT MEGOLDÁSÁRÓL

RÓZSA PÁL

Bevezetés

A lineáris differenciál- és differenciaegyenletek és egyenletrendszerek elmélete — mint ismeretes — az analízis egyik legalaposabban feltárt területének tekinthető. Az idevágó irodalom azonban a megoldás explicit előállítását szinte kivétel nélkül csak a *szokásos* kezdeti feltételek esetén, vagyis abban az esetben adja meg, amikor az ismeretlen függvény és annak deriváltjai, illetve az ismeretlen függvények, a független változó *egy bizonyos* értékénél adóttak. Annak az általánosabb feladatnak a megoldására, amikor az ismeretlen függvény és annak *szukcesszív* deriváltjai a független változó több *különböző* értékénél vannak előírva, Th. VAHLEN egyik dolgozatában [5] található eljárás. Th. VAHLEN az igen speciális $y^{(n)} = f(x)$ differenciálegyenletnek a mondott feltételeket kielégítő megoldására ad explicit előállítást. Meg kell még említeni, hogy G. D. BIRKHOFF egyik dolgozatában [1] azt az általánosabb esetet vizsgálja, amikor a fenti differenciálegyenletnél az előírt deriváltak *tetszőleges* rendűek, explicit megoldást azonban nem ad.

E dolgozat célja, hogy a fenti differenciálegyenletnél általánosabb lineáris differenciál- és differenciaegyenletek, illetve rendszerek *általános*¹⁾ kezdeti feltételeket kielégítő megoldása számára adjon exisztencia-kritériumot, valamint eljárást a megoldás explicit alakban való előállítására. Az 1. §. és 2. §. a rendszerek és az n -edrendű egyenletek általános kezdeti feltételeket kielégítő megoldásának a meghatározását tartalmazza. A 3. §. és 4. §. az előző két paragrafus eredményeit lineáris differenciaegyenletekre és differenciaegyenlet-rendszerekre alkalmazza.

1. §.

Tekintsük az

$$(1.1) \quad \dot{x} = A(t)x + f(t)$$

¹⁾ „Általános” kezdeti feltételeken a továbbiakban azt értjük, hogy az ismeretlen függvények értéke, illetve az ismeretlen függvény tetszőleges rendű deriváltjai a független változó több különböző értékénél vannak előírva. (Az általános kezdeti feltételek tehát magukban foglalják az úgynevezett kerületi feltételeket is, amelyek egy intervallum két végpontján írják elő a függvény, illetve bizonyos deriváltja értékét.)

elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletrendszert, és legyen

$$(1.2) \quad \dot{y} = A(t)y$$

a hozzá tartozó homogén rendszer, ahol $x, y, f(t)$ n -elemű oszlopvektorok, $A(t) = [a_{ij}(t)]$ n -edrendű kvadratikus matrix. Az $a_{ij}(t)$ és az $f_i(t)$ adott függvények valamely T ($a \leq t \leq b$) zárt intervallumban folytonosak.

Az alábbiakban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy létezik-e, és ha igen, hogyan határozható meg az (1.1) differenciálegyenletrendszernek az a megoldása, amely az

$$(1.3) \quad \begin{aligned} x_{\alpha_i}(t_i) &= x_{i0} \quad , & i &= 1, 2, \dots, n \\ t_i &\in T \end{aligned}$$

általános kezdeti feltételeket elégíti ki. Itt α_i egész ($1 \leq \alpha_i \leq n$) és értékei között egyenlők is lehetnek.²⁾

Legyen $X(t) = [x_{ij}(t)]$ az (1.2) egyenlethez tartozó rezolvens matrix, amely tehát kielégíti az

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

matrixdifferenciálegyenletet és az $X(t_0) = E$ kezdeti feltételt. Jelölje $x^{\alpha_i}(t_i)$ a rezolvens matrix α_i -edik sorát a t_i helyen, továbbá $[x_{\alpha_i j}(t_i)]$ az e sorokból ($i = 1, 2, \dots, n$) alkotott n -edrendű kvadratikus matrixot.

Az (1.1) egyenletrendszer (1.3) feltételeket kielégítő megoldását megkapjuk, ha az (1.2) homogén egyenlet

$$(1.4) \quad y_{\alpha_i}(t_i) = x_{i0} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

inhomogén feltételeket kielégítő megoldásához hozzáadjuk az (1.1) inhomogén egyenletnek az

$$(1.5) \quad x_{\alpha_i}(t_i) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

homogén feltételeket kielégítő megoldását.

1. tétel. Az (1.2) homogén lineáris differenciálegyenletrendszernek akkor és csakis akkor létezik az (1.4) feltételeket kielégítő egyértelmű megoldása, ha

$$(1.6) \quad |x_{\alpha_i j}(t_i)| \neq 0 \quad ;$$

a megoldást

$$(1.7) \quad y(t; t, x_0) = X(t) [x_{\alpha_i j}(t_i)]^{-1} x_0$$

szolgáltatja.

²⁾ A t_i értékek között is lehetnek egyenlők, de — amint az a probléma természetéből következik és az 1. tételből is kiolvasható — ha valamennyi t_i megegyezik, akkor α_i értékei között nem lehetnek egyenlők, s ugyanez vonatkozik t_i értékeire, ha valamennyi α_i megegyezik.

Bizonyítás: Az (1.6) feltétel szükséges. Tegyük fel ugyanis, hogy az (1.2) rendszernek létezik az (1.4) feltételeket kielégítő megoldása. Akkor ez az alapszisztem képező $x_1(t), \dots, x_n(t)$ vektorok lineáris kombinációjaként előállítható:

$$(1.8) \quad y(t; t, x_0) = X(t) c.$$

Az (1.8) egyenletnek ki kell elégítenie az (1.4) feltételt:

$$x_0 = [x_{a_{ij}}(t_i)] c.$$

Innen a c vektor akkor és csakis akkor határozható meg egyértelműen, ha

$$|x_{a_{ij}}(t_i)| \neq 0.$$

Ekkor

$$c = [x_{a_{ij}}(t_{j1}) \quad x_0],$$

ezt (1.8)-ba helyettesítve, (1.7) adódik.

Az (1.6) feltétel elegendő is. Ugyanis, ha (1.6) teljesül, akkor $[x_{a_{ij}}(t_i)]$ invertálható. Képezzük az

$$(1.9) \quad U(t) = X(t) [x_{a_{ij}}(t_i)]^{-1}$$

szorzatot. Az így nyert

$$U(t) = [u_1(t), \dots, u_n(t)]$$

matrix oszlopvektorai az (1.2) rendszer lineárisan független partikuláris megoldásai, tehát alapszisztem alkotnak. Az (1.9) szorzatból kiolvasható, hogy az $u_j(t)$ vektorok elemei az alábbi összefüggésnek tesznek eleget:

$$(1.10) \quad u_{a_{ij}}(t_i) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Innen következik, hogy az (1.2) egyenlet (1.4) feltételeket kielégítő megoldását az $u_1(t), \dots, u_n(t)$ alapszisztem segítségével

$$y(t; t, x_0) = \sum_{j=1}^n u_j(t) x_{j0} = U(t) x_0$$

alakban kapjuk, ahonnan (1.9) segítségével (1.7) következik.

Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

2. tétel. Ha teljesül az (1.6) feltétel, akkor az (1.1) differenciálegyenlet-rendszer (1.5) feltételeket kielégítő megoldását

$$(1.11) \quad x(t; t, 0) = U(t) z(t)$$

adja, ahol

$$(1.12) \quad z(t) = [z_j(t)] = \left[\int_{t_j}^t v^j(\tau) f(\tau) d\tau \right] \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

és

$$(1.13) \quad \begin{bmatrix} v^1(t) \\ \vdots \\ v^n(t) \end{bmatrix} = V(t) = U(t)^{-1}.$$

Bizonyítás: Ha az (1.1) differenciálegyenletrendszernek az $x(t_0) = 0$ homogén feltételeket kielégítő

$$x(t) = X(t) \int_{t_0}^t X(\tau)^{-1} f(\tau) d\tau$$

megoldásába³⁾ behelyettesítjük az (1.9) összefüggést, és levonjuk belőle az (1.2) homogén egyenletnek azt az

$$y(t) = U(t) \left[\int_{t_j}^{t_j} x^{aj}(t_j) X(\tau)^{-1} f(\tau) d\tau \right]$$

megoldását, amely kielégíti az

$$y_{aj}(t_j) = x_{aj}(t_j; t_0, 0), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

feltételeket, megkapjuk az (1.1) egyenletnek az (1.5) homogén feltételeket kielégítő megoldását:

$$(1.14) \quad x(t; t, 0) = U(t) \left[\int_{t_j}^{t_j} x^{aj}(t_j) X(\tau)^{-1} f(\tau) d\tau \right].$$

Ha még egyszer felhasználjuk az (1.9) összefüggést és bevezetjük az (1.12), (1.13) jelöléseket, a keresett megoldásra (1.11) adódik.

Az 1. és 2. tétel eredményeként kimondhatjuk, hogy ha

$$|x_{aj}(t_i)| \neq 0,$$

akkor az (1.1) egyenlet (1.3) általános kezdeti feltételeket kielégítő megoldását

$$x(t; t, x_0) = U(t) \{x_0 + z(t)\}$$

³⁾ Lásd pl.: [2], 384. oldal.

azaz

$$x_i(t; t_k, x_{k0}) = \sum_{j=1}^n u_{ij}(t) \{x_{j0} + z_j(t)\} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

szolgáltatja, ahol

$$[u_{ij}(t)] = \mathbf{U}(t) = \mathbf{X}(t) [x_{\alpha_i j}(t_i)]^{-1},$$

$$z_j(t) = \int_{t_j}^t \sum_{k=1}^n v_{jk}(\tau) f_k(\tau) d\tau$$

és

$$[v_{ij}(t)] = [u_{ij}(t)]^{-1}.$$

2. §.

A következőkben meghatározzuk az

$$(2.1) \quad x^{(n)} = p_{n-1}(t) x^{(n-1)} + \dots + p_0(t) x + f(t)$$

n -edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet

$$(2.2) \quad x^{(k_i)}(t_i) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

k_i egész $(0 \leq k_i \leq n-1)$

általános kezdeti feltételeket kielégítő explicit megoldását. A (2.1) egyenlet az

$$(2.3) \quad x_k(t) = x^{(k-1)}(t), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

transzformáció segítségével visszavezethető az

$$(2.4) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

elsőrendű rendszerre, ahol

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 \\ p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & \dots & p_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Legyen $\mathbf{W}(t) = [w_{ij}(t)]$ a (2.4) egyenlet rezolvens matrixa (ez nem egyéb, mint a (2.1)-hez tartozó homogén egyenlet normált alaprendszert alkotó partikuláris megoldásaiból képzett Wronski-féle matrix), ekkor a (2.4) egyenletnek a (2.2) feltételekből ugyancsak a (2.3) transzformációval nyert

$$x_{\alpha_i}(t_i) = x_{i0}, \quad \alpha_i = k_i + 1$$

általános kezdeti feltételeket kielégítő megoldását az 1. és 2. tételek felhasználásával

$$(2.5) \quad x(t; t, x_0) = W(t) [w_{aij}(t_i)]^{-1} \left\{ x_0 + \left[\int_{t_i}^t w^{ai}(t_i) W(\tau)^{-1} f(\tau) d\tau \right] \right\}$$

alakban kapjuk. A (2.5) összefüggést a tetszőleges — nem szükségképpen különböző — **B** és **C** nonsinguláris transzformáló matrixok segítségével következőképpen alakítjuk át:

$$(2.6) \quad x(t; t, x_0) = W(t) B([w_{aij}(t_i)] B)^{-1} \left\{ x_0 + \left[\int_{t_i}^t w^{ai}(t_i) C(W(\tau) C)^{-1} f(\tau) d\tau \right] \right\}.$$

Az itt fellépő $W(t)B$, illetve $W(t)C$ a (2.1)-hez tartozó homogén egyenlet tetszőleges — egymástól nem szükségképpen különböző —, lineárisan független $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)$, illetve $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ megoldás-rendszeréből képzett Wronski-féle matrix. Ha még figyelembe vesszük, hogy a megoldás-vektornak az első komponense szolgáltatja a keresett megoldást, továbbá az $f(t)$ vektornak csak az utolsó komponense 0-tól különböző, a (2.6) összefüggésből könnyen kiolvasható a következő tétel.

3. tétel. A (2.1) differenciálegyenlet (2.2) általános kezdeti feltételeket kielégítő egyértelmű megoldása akkor és csak akkor létezik, ha

$$(2.7) \quad |\eta_j^{(k)}(t_i)| \neq 0.$$

A megoldást ekkor

$$(2.8) \quad x(t; t_v, x_{v0}) = \sum_{v=1}^n \frac{H_v(t)}{H} \left\{ x_{v0} + \int_{t_v}^t \frac{\Xi_n(\tau, v)}{\Xi(\tau)} f(\tau) d\tau \right\}$$

szolgáltatja, ahol

$$H = |\eta_j^{(k)}(t_i)|, \quad \Xi(\tau) = |\xi_j^{(i-1)}(\tau)|,$$

továbbá $H_v(t)$ a H determinánsból úgy keletkezik, hogy v -edik sorát az $\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_n(t)$ sorral, $\Xi_n(\tau, v)$ a $\Xi(\tau)$ determinánsból pedig úgy, hogy utolsó sorát a $\xi_1^{(k_v)}(t_v), \xi_2^{(k_v)}(t_v), \dots, \xi_n^{(k_v)}(t_v)$ sorral helyettesítjük.

A kapott eredmény magában foglalja mint speciális esetet a szokásos kezdeti feltételek esetét. Ekkor $t_i = t_0, k_i = i - 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), a (2.8) képlet pedig a következő ismert alakba⁴⁾ megy át:

$$x(t; t_0, x_{k0}) = \sum_{j=1}^n w_{1j}(t) x_{j0} + \int_{t_0}^t \frac{\Xi_n(\tau)}{\Xi(\tau)} f(\tau) d\tau.$$

Itt $\Xi_n(\tau)$ a $\Xi(\tau)$ determinánsból úgy keletkezik, hogy utolsó sorát a $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_n(t)$ sorral helyettesítjük.

⁴⁾ Lásd pl.: [6], II. kötet, 197. oldal.

Példaként meghatározzuk az

$$(2.9) \quad x^{(n)}(t) = f(t)$$

differenciálegyenletnek az

$$x^{(k_i)}(t_i) = x_{i0} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$k_i \text{ egész } (0 \leq k_i \leq n-1)$$

feltételeket kielégítő megoldását.⁵⁾

Az egyértelmű megoldás létezésének szükséges és elégséges feltétele (2.7) alapján

$$\left| \frac{t_i^{j-1-k_i}}{(j-1-k_i)!} \right| \neq 0 \quad ,$$

ami megegyezik a G. D. BIRKHOFF dolgozatában szereplő feltétellel. Felhasználva a (2.8) összefüggést és kifejtve az integrandusban szereplő determinánsokat, a keresett megoldást

$$x(t; t_k, x_{k0}) = \sum_{v=1}^n \omega_v(t) \left\{ x_{v0} + \int_{t_v}^t \frac{(t_v - \tau)^{n-k_v-1}}{(n-k_v-1)!} f(\tau) d\tau \right\}$$

alakban nyerjük, ahol

$$\omega_v(t) = \frac{\Omega_v(t)}{\Omega} \quad , \quad \Omega = \left| \frac{t_i^{j-1-k_i}}{(j-1-k_i)!} \right|$$

és $\Omega_v(t)$ az Ω determinánsból úgy keletkezik, hogy v -edik sorát az $1, t, \dots, t^{n-1}/(n-1)!$ sorral helyettesítjük.

Abban a további speciális esetben, amikor a (2.9) egyenlet megoldása az

$$i = 1, 2, \dots, m$$

$$(2.10) \quad x^{(v)}(t_i) = x_i^{(v)} \quad v = 0, 1, \dots, r_i - 1$$

$$\sum_{i=1}^m r_i = n$$

feltételeknek tesz eleget, az $\omega_i(t)$ „alapfüggvények” éppen az Hermite-féle, $k_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) esetén pedig a Lagrange-féle alappolinomok. Ezen esetekben a (2.9) egyenlet megoldására megkapjuk a TH. VAHLEN dolgozatában⁶⁾ is szereplő

$$(2.11) \quad x(t; t_k, x_k^{(v)}) = \sum_{i=1}^m \sum_{v=0}^{r_i-1} H_{iv}(t) \left\{ x_i^{(v)} + \int_{t_i}^t \frac{(t_i - \tau)^{n-v-1}}{(n-v-1)!} f(\tau) d\tau \right\}$$

formulát, ahol

$$H_{iv}^{(\nu)}(t_j) = \delta_{ij} \delta_{\mu\nu} \quad .$$

⁵⁾ Ezt a fajta feladatot vizsgálja G. D. BIRKHOFF idézett dolgozatában (lásd: [1], 110. oldal).

⁶⁾ Lásd: [5], 186. oldal.

3. §.

Ebben a paragrafusban az 1. §-ban közölt gondolatmenetet lineáris differenciaegyenletrendszerekre alkalmazzuk. Tekintsük a

$$(3.1) \quad \Delta f(x) \equiv f(x+1) - f(x) = P(x)f(x) + q(x)$$

lineáris differenciaegyenletrendszert, ahol $f(x)$ és $q(x)$ n -elemű oszlopvektorok, $P(x) = [p_{ij}(x)]$ n -edrendű kvadratikus matrix. Az egyenletben szereplő valamennyi függvény egész argumentumokra van értelmezve. A differenciálegyenletrendszerekhez hasonlóan, a (3.1) egyenletnek az

$$(3.2) \quad f(x_0) = f_0$$

kezdeti feltételeket kielégítő megoldását megkapjuk, ha a

$$(3.3) \quad \Delta g(x) = P(x)g(x)$$

homogén egyenletnek a $g(x_0) = f_0$ inhomogén feltételeket kielégítő $g(x; x_0, f_0)$ megoldásához hozzáadjuk a (3.1) inhomogén egyenlet $f(x_0) = 0$ homogén feltételeket kielégítő $f(x; x_0, 0)$ megoldását. Először meghatározzuk a

$$(3.4) \quad \Delta F(x) = P(x)F(x)$$

matrixdifferenciaegyenletnek azt a megoldását, amely kielégíti az

$$\bullet \quad F(x_0) = E$$

kezdeti feltételt. Az elsőrendű lineáris differenciaegyenletek elméletében követett eljárást⁷⁾ értelemszerűen alkalmazva a (3.4) matrixdifferenciaegyenletre — tekintettel arra, hogy az ekvivalens az

$$F(x+1) = (E + P(x))F(x)$$

egyenlettel — azt kapjuk, hogy

$$(3.5) \quad F(x) = (E + P(x-1))(E + P(x-2)) \dots (E + P(x_0)) \cdot$$

Az így nyert $F(x) = [f_{ij}(x)]$ rezolvens matrix oszlopvektorai a (3.3) egyenlet lineárisan független partikuláris megoldásai, melyek normált alaprendszert alkotnak.

A rezolvens matrix segítségével a homogén egyenlet keresett megoldása

$$(3.6) \quad g(x; x_0, f_0) = F(x)f_0$$

alakban adódik, az inhomogén egyenlet $f(x; x_0, 0)$ partikuláris megoldása pedig az állandó variálása néven ismert módszer differenciaegyenletrendszerekre való alkalmazásával nyerhető:

$$(3.7) \quad f(x; x_0, 0) = F(x) \sum_{v=x_0}^{x-1} F(v+1)^{-1} q(v) \cdot$$

⁷⁾ Lásd: [3], 296. oldal.

A (3.1) egyenlet (3.2) feltételeket kielégítő megoldása tehát

$$(3.8) \quad f(x; x_0, f_0) = F(x) \left\{ f_0 + \sum_{v=x_0}^{x-1} F(v+1)^{-1} q(v) \right\}.$$

Az 1. §-ban kifejtett megfontolás alkalmazásával megkaphatjuk a (3.1) differenciaegyenletrendszernek

$$(3.9) \quad f_{a_i}(x_i) = f'_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

általános kezdeti feltételeket kielégítő megoldását. Jelölje $f^{a_i}(x_i)$ a rezolvens matrix a_i -edik sorát az x_i helyen és $[f_{a_{ij}}(x_i)]$ az e sorokból ($i = 1, 2, \dots, n$) alkotott kvadratikuss matrixot. Az 1. és 2. tétel analógiájára könnyen bebizonyítható a következő két tétel:

4. tétel. A (4.3) homogén lineáris differenciaegyenletrendszernek akkor és csak akkor létezik a

$$[g_{a_i}(x_i)] = f'$$

inhomogén feltételeket kielégítő egyértelmű megoldása, ha

$$(3.10) \quad |f_{a_{ij}}(x_i)| \neq 0;$$

a megoldást

$$g(x; x, f') = F(x) [f_{a_{ij}}(x_i)]^{-1} f'$$

szolgáltatja.

5. tétel. Ha teljesül a (3.10) feltétel, akkor a (3.1) inhomogén lineáris differenciaegyenletrendszer

$$(3.11) \quad f_{a_i}(x_i) = 0$$

homogén feltételeket kielégítő megoldását

$$(3.12) \quad f(x; x, 0) = T(x) h(x)$$

adja, ahol

$$(3.13) \quad T(x) = F(x) [f_{a_{ij}}(x_i)]^{-1},$$

$$(3.14) \quad h(x) = [h_i(x)] = \left[\sum_{v=x_i}^{x-1} s^i(v+1) q(v) \right]$$

és

$$(3.15) \quad \begin{bmatrix} s^1(x) \\ \vdots \\ s^n(x) \end{bmatrix} = S(x) = T(x)^{-1}.$$

A 4. tétel bebizonyítása teljesen megegyezik az 1. tételével, az 5. tétel bizonyítása pedig a következő: Ha a (3.1) differenciaegyenletrendszernek a homogén feltételeket kielégítő (3.7) megoldásába behelyettesítjük a (3.13) összefüggést és levonjuk belőle a (3.3) homogén egyenletnek azt a

$$g(x) = T(x) \left[\sum_{v=x_0}^{x_j-1} f^{a_j}(x_j) F(v+1)^{-1} q(v) \right]$$

megoldását, amely a

$$g_{a_j}(x_j) = f_{a_j}(x_j; x_0, 0) , \quad j = 1, 2, \dots, n$$

feltételeket elégíti ki, a (3.1) egyenletnek a (3.11) homogén feltételeket kielégítő megoldására

$$(3.16) \quad f(x; x, 0) = T(x) \left[\sum_{v=x_j}^{x-1} f^{a_j}(x_j) F(v+1)^{-1} q(v) \right]$$

adódik. Abban az esetben, amikor $x < x_j$, a (3.16) kifejezésben szereplő szummát a

$$\sum_{v=x_j}^{x-1} = - \sum_{v=x}^{x_j-1}$$

összefüggés definiálja. Ismét felhasználva a (3.13) összefüggést, és bevezetve a (3.14), (3.15) jelöléseket, a keresett megoldásra megkapjuk a (3.12) kifejezést.

A 4. és 5. tétel eredményeként kimondható, hogy ha

$$|f_{a_{ij}}(x_i)| \neq 0 ,$$

akkor a (3.1) differenciaegyenletrendszer (3.9) általános kezdeti feltételeket kielégítő megoldását

$$f(x; x, f') = T(x) \{f' + h(x)\} ,$$

azaz

$$f_i(x; x_k, f'_k) = \sum_{j=1}^n t_{ij}(x) \{f'_j + h_j(t)\}$$

szolgáltatja, ahol

$$[t_{ij}(x)] = T(x) = F(x) [f_{a_{ij}}(x_i)]^{-1} ,$$

$$h_i(x) = \sum_{v=x_i}^{x-1} \sum_{k=1}^n s_{ik}(v+1) q_k(v)$$

és

$$[s_{ik}(x)] = [t_{ik}(x)]^{-1} .$$

4. §.

Ebben a paragrafusban a

$$(4.1) \quad \Delta^n f(x) = p_{n-1}(x) \Delta^{n-1} f(x) + \dots + p_0(x) f(x) + q(x)$$

n -edrendű lineáris differenciaegyenlet különféle kezdeti feltételeket kielégítő megoldásának meghatározásával foglalkozunk. Az együtthatók egész argumentumokra értelmezett függvények.

A (4.1) egyenlet az

$$(4.2) \quad f_k(x) = \Delta^{k-1} f(x), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

transzformációval visszavezethető egy speciális (3.1) alakú differenciaegyenlet-rendszerre, ahol

$$(4.3) \quad \mathbf{P}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ p_0(x) & p_1(x) & \dots & \dots & p_{n-1}(x) \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{q}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(x) \end{bmatrix}.$$

Az így nyert rendszernek az

$$(4.4) \quad f_k(x_0) \equiv \Delta^{k-1} f(x_0) = f_{k0}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

kezdeti feltételeket kielégítő megoldására érvényes a (3.8) összefüggés. Egy tetszőleges, nem-szinguláris \mathbf{C} transzformáló matrix segítségével ez az összefüggés a következőképpen alakítható át:

$$(4.5) \quad f(x; x_0, f_0) = \mathbf{F}(x) f_0 + \mathbf{F}(x) \mathbf{C} \sum_{v=x_0}^{x-1} (\mathbf{F}(v+1) \mathbf{C})^{-1} \mathbf{q}(v).$$

Az $\mathbf{F}(x) \mathbf{C}$ matrix, a (4.1)-hez tartozó homogén egyenlet tetszőleges, lineárisan független $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ megoldásaiból, és ezek differenciáiból képzett — a Wronski-féle matrixra emlékeztető — matrix. Bennünket azonban nem a (4.1) differenciaegyenletből a (4.2) transzformációval nyert rendszernek, hanem magának a (4.1) egyenletnek a megoldása érdekel, ezt pedig a (4.5) megoldás-vektornak az első komponense szolgáltatja. Ha még figyelembe vesszük — az 1. §-ban vázolt gondolatmenethez hasonlóan —, hogy a $\mathbf{q}(x)$ vektornak csak az utolsó komponense 0-tól különböző, akkor a (4.4) feltételeket kielégítő megoldás a következő alakban adódik:

$$f(x; x_0, f_{x0}) = \sum_{k=1}^n f_{1k}(x) f_{k0} + \sum_{v=x_0}^{x-1} \frac{\Delta_n(v)}{\Delta(v)} q(v).$$

Itt $\Delta(v) = |\Delta^{i-1} \varphi_j(v+1)|$ és $\Delta_n(v)$ a $\Delta(v)$ determinánsból úgy keletkezik, hogy utolsó sorát a $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ sorral helyettesítjük. Az $f_{1k}(x)$ függvények a (4.1)-hez tartozó homogén egyenlet normált alaprendszert alkotó megoldásai, melyek az $\mathbf{F}(x) = [f_{ij}(x)]$ rezolvens matrix (3.5) kifejezéséből (4.3) figyelembevételével határozhatók meg.

A továbbiakban a (4.1) egyenletnek az

$$(4.6) \quad f(x_k) = f'_k, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad x_k \text{ egész}$$

általános kezdeti feltételeket kielégítő explicit megoldását kívánjuk meghatározni. Mielőtt azonban erre rátérnénk, a (4.6) feltételeknek az

$$x_k = x_0 + k - 1, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

speciális esetét tekintjük. Ez mintegy átmenetet képez a (4.4) és az általános (4.6) feltételek között.

Vezessük be a következő jelöléseket. Legyen

$$[f(x_0 + k - 1)] = [f'_{k0}] = f'_0$$

az adott kezdeti értékekből, mint komponensekből alkotott vektor,

$$f_0 = [f_{k0}]$$

pedig a (4.4) összefüggéssel definiált értékekből alkotott vektor. Továbbá, bevezetve a

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} i-1 \\ j-1 \end{bmatrix}$$

háromszögmatrixot, könnyen belátható, hogy az f'_0 és f_0 vektorok a következő transzformációval kapcsolhatók össze:

$$(4.7) \quad f'_0 = \mathbf{H} f_0.$$

Itt jegyezzük meg, hogy a \mathbf{H} matrix, a $\mathbf{D} = \langle (-1)^{k-1} \rangle$ diagonálmatrix segítségével képzett hasonló transzformációval invertálható:⁸⁾

$$\mathbf{H}^{-1} = \mathbf{D} \mathbf{H} \mathbf{D}^{-1}.$$

Ha az $\mathbf{F}(x)$ rezolvens matrixra alkalmazzuk a \mathbf{H} transzformációt, (4.4) figyelembevételével az

$$(4.8) \quad \mathbf{F}'(x) = \mathbf{H} \mathbf{F}(x) = [f_{1j}(x + i - 1)]$$

összefüggést kapjuk.

⁸⁾ A fenti összefüggés felírható a

$$\sum_{v=1}^n (-1)^{v+j} \binom{i-1}{v-1} \binom{v-1}{j-1} = \delta_{ij}$$

alakban is. Ez valóban fennáll, mert

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^n (-1)^{v+j} \binom{i-1}{v-1} \binom{v-1}{j-1} &= (-1)^j \sum_{v=j}^i (-1)^v \frac{(i-1)!}{(j-1)! (i-v)! (v-j)!} = \\ &= (-1)^j \binom{i-1}{j-1} \sum_{v=j}^i (-1)^v \binom{i-j}{v-j} = \binom{i-1}{j-1} \sum_{\kappa=0}^{i-j} (-1)^\kappa \binom{i-j}{\kappa} = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Ezek után a (4.1) egyenletből a (4.2) transzformációval nyert differencia-egyenletrendszer (4.4) feltételeket kielégítő (3.8) alakú megoldását kissé átalakítjuk. Szorozzuk meg a (3.8) megoldási formula mindkét oldalát balról a \mathbf{H} matrixszal, vegyük figyelembe a (4.8) összefüggést, és amint azt a (4.5) formulánál tettük, egy tetszőleges, nem-szinguláris \mathbf{C} matrix segítségével hozzuk a következő alakra:

$$(4.9) \quad \mathbf{H}f(x; x_0, f_0) = \mathbf{F}'(x)f_0 + \mathbf{F}'(x)\mathbf{C} \sum_{v=x_0}^{x-1} (\mathbf{F}'(v+1)\mathbf{C})^{-1}\mathbf{H}q(v).$$

Az itt szereplő

$$\mathbf{F}'(x)\mathbf{C} = [\varphi_j(x+i-1)]$$

matrixban szereplő függvények a (4.1)-hez tartozó homogén egyenlet tetszőleges, lineárisan független megoldásai. Felhasználva a (4.7) összefüggést, (4.9) első komponensére

$$(4.10) \quad f(x; x_0, f_0) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \begin{pmatrix} i-1 \\ j-1 \end{pmatrix} f_{i0} f_{1j}(x) + \sum_{v=x_0}^{x-1} \frac{\Phi_n(v, x)}{\Phi(v)} q(v)$$

adódik, ahol $\Phi(v) = |\varphi_j(v+i)|$ és $\Phi_n(v, x)$ a $\Phi(v)$ determinánsból úgy keletkezik, hogy utolsó sorát a $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ sorral helyettesítjük.⁹⁾ Ezzel megkaptuk a (4.1) egyenletnek (4.6) feltételeket kielégítő megoldását $x_k = x_0 + k - 1$ esetén.

Visszatérve a (4.1) egyenlet (4.6) általános kezdeti feltételeket kielégítő megoldására, ezt a 3. § eredményeinek a felhasználásával a következőképpen határozhatjuk meg. Vezessük be a kezdeti értékekből, mint komponensekből alkotott

$$[f(x_k)] = [f'_k] = f'$$

vektort. A. 4. és 5. tételek alkalmazásával közvetlenül adódik a

$$\mathbf{H}f(x; x, f') = \mathbf{F}'(x) [f_{1j}(x_i)]^{-1} \left\{ f' + \sum_{v=x_i}^{x-1} f^1(x) (\mathbf{F}'(v+1))^{-1} \mathbf{H}q(v) \right\}$$

összefüggés, amely a tetszőleges — nem szükségképpen különböző — \mathbf{B} és \mathbf{C} nonszinguláris transzformáló matrixok segítségével — hasonlóan ahhoz, ahogy azt a 2. §-ban tettük — így alakítható át:

$$(4.11) \quad \mathbf{H}f(x; x, f') = \mathbf{F}'(x) \mathbf{B}([f_{1j}(x_i)] \mathbf{B})^{-1} \left\{ f' + \sum_{v=x_i}^{x-1} f^1(x_i) \mathbf{C} (\mathbf{F}'(v+1) \mathbf{C})^{-1} \mathbf{H}q(v) \right\}.$$

Az itt szereplő $\mathbf{F}'(x) \mathbf{B} = [\varphi_j(x+i-1)]$, illetve $\mathbf{F}'(x) \mathbf{C} = [\varphi_j(x+i-1)]$ matrixban szereplő függvényrendszer a (4.1)-hez tartozó homogén egyenlet tetszőleges — egymástól nem szükségképpen különböző — lineárisan független

⁹⁾ A (4.10) kifejezés első tagja az $f^1(x) \mathbf{H}^{-1} f'_0$ szorzat részletesen kiírva. A második tag megegyezik az irodalomból ismert eredménnyel (lásd pl.: [3], 313. oldal).

megoldásrendszere. A keresett megoldást a (4.11) összefüggés első komponense adja meg. Erre érvényes az alábbi tétel:¹⁰⁾

6. tétel. A (4.1) differenciaegyenlet (4.6) általános kezdeti feltételeket kielégítő egyértelmű megoldása akkor és csak akkor létezik, ha

$$|\psi_j(x_i)| \neq 0.$$

A megoldást ekkor

$$(4.12) \quad f(x; x_*, f'_*) = \sum_{k=1}^n \frac{\Psi_k(x)}{\Psi} \left\{ f'_k + \sum_{v=1}^{x-1} \frac{\Phi_n(v, x_k)}{\Phi(v)} q(v) \right\}$$

szolgáltatta, ahol $\Psi = |\psi_j(x_i)|$ és $\Psi_k(x)$ a Ψ determinánsból úgy keletkezik, hogy k -adik sorát a $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ sorral helyettesítjük. ($\Phi(v)$ és $\Phi_n(v, x_k)$ jelentése a (4.10) képlet után található.)

(Beérkezett : 1957. III. 11.)

IRODALOM

- [1] BIRKHOFF, G. D. : „General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and quadrature”. *Transactions of the American Mathematical Society* **7** (1906) 107—136.
- [2] ГАЙТМАХЕР Ф. Р. : *Теория матриц*. Гостехиздат, Москва, 1953.
- [3] GELFOND, A. O. : *Differenciászámítás*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.
- [4] RÓZSA P. : „A matrix-számítás alkalmazása rudak és lemezek sztatikájában”. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **1** (1956) 593—621.
- [5] VAHLEN, K. TH. : „Über den Heaviside-Kalkül”. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **13** (1933) 183—198.
- [6] DE LA VALLÉE POUSSIN, CH. J. : *Cours d'analyse infinitésimale*. Gauthier-Villars, Paris, 1925.

О ЯВНОМ РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ОБЩИМ НАЧАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ

P. RÓZSA

Резюме

Литература, относящаяся к линейным дифференциальным уравнениям и системам, даёт явное представление решения лишь в том случае, когда неизвестная функция и её производные или неизвестные функции даны при некотором значении независимой переменной. Это привычные начальные условия. Для решения более общей задачи, когда неизвестная функция и её последовательные производные даны при нескольких различных значе-

¹⁰⁾ Az eredmény egy speciális esetének konkrét gyakorlati alkalmazását illetően lásd : [4], 600—601. és 612—615. oldalak.

ниях независимого переменного, ТН. VANLEN даёт в работе [5] метод построения явного решения в случае очень специального дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x)$.

Настоящая работа, обобщая метод ТН. VANLEN, даёт критерий существования а также метод получения в явной форме решения наиболее общих линейных дифференциальных и разностных уравнений и их систем (с переменными коэффициентами), удовлетворяющих общим начальным условиям.

Пусть $\mathbf{X}(t) = [x_{ij}(t)]$ есть так называемая резольвентная матрица однородной системы (1.2), относящейся к данной неоднородной системе линейных дифференциальных уравнений (1.1), которая, таким образом, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t)$$

и начальному условию $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{E}$. В силу теорем 1 и 2 система дифференциальных уравнений (1.1) имеет единственное решение, удовлетворяющее общему начальному условию (1.3), в том и только в том случае, если $|x_{aij}(t_i)| \neq 0$; решение даётся формулой

$$x(t; t, x') = \mathbf{U}(t) \{x' + z(t)\},$$

где значение $\mathbf{U}(t)$ и $z(t)$ даётся выражениями (1.9), (1.12) и (1.13).

Теорема 3 применяет эти результаты для случая линейных дифференциальных уравнений n -ого порядка. Пусть $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$ и $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)$ суть любые линейно-независимые системы решений относящегося к (2.1) однородного уравнения. Теорема 3 утверждает, что единственное решение дифференциального уравнения (2.1), удовлетворяющее начальным условиям (2.2), существует в том и только в том случае, если $|\eta_j^{(k)}(t_i)| \neq 0$. Решение даётся выражением (2.8). В случае дифференциального уравнения (2.9) и начальных условий (2.10), получается соотношение (2.11), фигурирующее и в работе ТН. VANLEN.

Дальнейшая часть работы содержит применение полученных результатов к линейным системам разностных уравнений первого порядка и линейным разностным уравнениям n -го порядка. Пусть $\mathbf{F}(x) = [f_{ij}(x)]$ есть резольвентная матрица однородной системы (3.3), относящейся к (3.1), которая, таким образом, удовлетворяет уравнению (3.4) и начальному условию $\mathbf{F}(x_0) = \mathbf{E}$. В силу теорем 4 и 5 система разностных уравнений (3.1) имеет единственное решение, удовлетворяющее общим начальным условиям (3.9), в том и только в том случае, если $|f_{aij}(x_i)| \neq 0$. Решение даётся формулой $f(x; x, f') = \mathbf{T}(x) \{f' + h(x)\}$, где значения $\mathbf{T}(x)$ и $h(x)$ даются выражениями (3.13), (3.14) и (3.15). Наконец, теорема 6 утверждает, что, если $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ и $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ суть любые линейно-независимые системы решений относящихся к (4.1) однородного линейного разностного уравнения, то единственное решение линейного разностного уравнения (4.1), удовлетворяющее общему начальному условию (4.6), существует в том и только в том случае, если $|\psi_j(x_i)| \neq 0$. В этом случае решение даётся выражением (4.12). Автор применял этот метод в своей работе (4), где он дал решение одного разностного уравнения четвёртого порядка, удовлетворяющего специальным начальным условиям.

ON THE EXPLICIT SOLUTION OF DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE EQUATIONS SATISFYING GENERAL INITIAL CONDITIONS

P. RÓZSA

Summary

The literature of linear differential equations and that of the systems of linear differential equations gives their solution in explicit form in general only in the customary case if the unknown function and its derivatives, respectively the unknown functions are given at a single value of the independent variable. For the solution of the more general problem, when the unknown function and its successive derivatives are prescribed at several *different* values of the independent variable, a method can be found in a paper of TH. VAHLEN [5] who gives the explicit solution satisfying the conditions mentioned above for the special differential equation $y^{(n)} = f(x)$.

The present paper — generalizing TH. VAHLEN's method — gives the condition of existence and a method of solution in explicit form, of the most general linear differential equations and of systems of linear differential equations (with variable coefficients), satisfying *general* initial conditions mentioned above.

Let $\mathbf{X}(t) = [x_{ij}(t)]$ be the resolvent matrix of the homogeneous system (1.2) belonging to the given system of nonhomogeneous linear differential equations of the 1st order (1.1). The resolvent matrix satisfies the differential equation

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{X}(t)$$

and the initial condition $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{E}$. According to Theorems 1. and 2. the unique solution of the system of differential equations (1.1) satisfying the general initial conditions (1.3) exists if and only if $|x_{aj}(t_j)| \neq 0$; the solution is given by

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{t}, \mathbf{x}') = \mathbf{U}(t) \{ \mathbf{x}' + \mathbf{z}(t) \}$$

where the meaning of $\mathbf{U}(t)$ and $\mathbf{z}(t)$ can be seen from the formulae (1.9), (1.12) and (1.13).

Theorem 3. applies the above mentioned results to linear differential equations of the n^{th} order. Let $\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)$, resp. $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t)$ be arbitrary, linearly independent systems of solutions of the homogeneous equation corresponding to (2.1). Theorem 3. states that the unique solution of the differential equation (2.1) satisfying the general initial conditions (2.2) exists if and only if $|\eta_j^{(k_i)}(t_i)| \neq 0$. The solution is represented by (2.8). Applying Theorem 3. we obtain the expression (2.11), occurring in the paper of TH. VAHLEN too, for the solution of the differential equation (2.9) satisfying the initial conditions (2.10).

Further our results are applied to systems of linear difference equations of the 1st order and linear difference equations of the n^{th} order. Let $\mathbf{F}(x) = [f_{ij}(x)]$ be the resolvent matrix of the homogeneous equation (3.3) belonging to (3.1). This resolvent matrix satisfies the difference equation (3.4) and the initial condition $\mathbf{F}(x_0) = \mathbf{E}$. According to Theorems 4. and 5. the unique

solution of the system of linear difference equations (3.1) satisfying the general initial condition (3.9) exists if and only if $|f_{aij}(x_i)| \neq 0$. The solution is given by $f(x; x, f') = T(x) \{f' + h(x)\}$ where the meaning of $T(x)$ and $h(x)$ is to be seen from formulae (3.13), (3.14) and (3.15). Finally Theorem 6. states that if $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ resp. $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)$ are arbitrary, linearly independent systems of solutions of the homogeneous linear difference equation belonging to (4.1) the unique solution of the linear difference equation of the n^{th} order (4.1) satisfying the general initial conditions (4.6) exists if and only if $|\psi_j(x_i)| \neq 0$. The solution is given by the expression (4.12). The author applied this method in his paper [4] where he gave the solution of a difference equation of the 4th order satisfying particular initial conditions.

GÉNÉRALISATION D'UN PROBLÈME DE L'INTERPOLATION EN CONNEXION AVEC LES FONCTIONS-NOYAU

GYÖRGY ADLER

Introduction

Nous nous proposons de généraliser un problème de l'interpolation soulevé par S. BERGMAN et M. SCHIFFER dans leur livre intitulé «Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics» ([1], pp. 258—261, 275—281.).

Considérons l'équation différentielle aux dérivées partielles de type elliptique

$$(1) \quad \Delta u(x, y) = q(x, y) u(x, y) \quad (q(x, y) > 0),$$

qui peut être traitée comme une équation d'Euler—Lagrange de l'intégrale de Dirichlet

$$(2) \quad E\{u\} = \iint_D [u_x^2 + u_y^2 + qu^2] dx dy,$$

si certaines conditions de dérivabilité concernant la fonction $q(x, y)$ étaient remplies, où D est un domaine du plan (x, y) .

Soit D un domaine borné, limité par la courbe fermée C ayant par intervalle des dérivées continues jusqu'au second ordre.

Nous disons qu'une fonction appartient à la classe Ω si elle possède des dérivées partielles continues jusqu'au second ordre dans le domaine D .

Nous définirons comme le produit scalaire des fonctions de la classe Ω l'expression suivante

$$(3) \quad E\{v, w\} = \iint_D [v_x w_x + v_y w_y + qvw] dx dy \quad (v, w \in \Omega)$$

qui correspond à l'intégrale de Dirichlet (2). Il est facile de démontrer que Ω est un espace métrique, dans lequel la norme des éléments est donnée par la quantité $\sqrt{E\{u\}}$ et le produit scalaire par l'expression $E\{v, w\}$.

Nous disons que deux éléments $v, w \in \Omega$ sont orthogonaux l'un sur l'autre si $E\{v, w\} = 0$. Si $E\{v\} = 1$ la fonction $v \in \Omega$ est dite normée.

Nous désignons par Σ l'espace des fonctions $u \in \Omega$ qui satisfont à l'équation (1).

Désignons dans la suite par P, Q des points du plan (x, y) . Soit $\varphi_\nu(P) \in \Sigma$ ($\nu = 1, 2, \dots$) un système de fonctions orthonormées et complet dans l'espace Σ , c'est à dire que à toute fonction $u \in \Sigma$ on peut trouver une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_\nu(P)$ qui se rapproche de u dans la métrique E avec une erreur inférieure à $\varepsilon > 0$ arbitrairement petite :

$$E \left\{ u - \sum_{\nu=1}^N c_{N\nu} \varphi_\nu \right\} < \varepsilon \quad (N > N_0(\varepsilon)) .$$

La fonction

$$(4) \quad K(P, Q) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu(P) \varphi_\nu(Q)$$

définie à l'aide du système $\{\varphi_\nu\}$ est appelée le noyau reproduisant de l'espace Σ par rapport à la métrique E . Le qualificatif «reproduisant» attire l'attention sur la propriété suivante de la fonction $K(P, Q)$:

$$(5) \quad E \{ K(P, Q), u(P) \} = u(Q) \quad (u \in \Sigma) .$$

On peut démontrer que la fonction $K(P, Q)$ est déterminée sans équivoque par le domaine D , par conséquent elle est indépendante du choix du système $\{\varphi_\nu\}$.

Nous supposons dans ce qui suit que $q(P)$ est une fonction analytique de ses deux variables x et y dans le domaine fermé $D + C$.

1. §.

Après cette introduction nous allons faire connaître le problème originel de l'interpolation qui est mentionné dans l'oeuvre de BERGMAN et SCHIFFER :

Cherchons la fonction $u \in \Sigma$ ayant la norme minimum qui prend des valeurs données

$$(6) \quad u(Q_i) = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

aux points Q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) du domaine D .

La solution du problème peut être exprimée par la fonction-noyau (4) sous la forme

$$u(P) = \sum_{i=1}^N x_i K(P, Q_i)$$

où les coefficients x_i peuvent être calculés à partir de la condition (6). La condition nécessaire et suffisante de la résolubilité du système d'équations (6) par rapport aux inconnues x_i , à savoir que le déterminant $|K(Q_i, Q_k)|$ ne s'annule pas, découle de l'hypothèse que la fonction $q(P)$ soit analytique.

2. §.

Nous généralisons ce problème de l'interpolation de la façon suivante :

Cherchons la fonction $u \in \Sigma$ ayant la norme minimum qui à chaque point $Q_i (i = 1, 2, \dots, N)$ du domaine D satisfait aux conditions en nombre α_i

$$(7) \quad \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}} u(Q_i)}{\partial x^{r_{ij}} \partial y^{s_{ij}}} = a_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, \alpha_i \end{array}$$

$r_{ij}, s_{ij} \geq 0$, entiers

Ce problème contient comme cas spécial ($\alpha_i = 1$, $r_{i1} = s_{i1} = 0$) le problème mentionné ci-dessus.

Nous présentons une méthode heuristique, avec laquelle la solution peut être construite, ensuite nous démontrons que la fonction ainsi obtenue est en effet la solution de notre problème.

Supposons que la solution cherchée soit représentée par la série

$$(8) \quad u = \sum_{v=1}^{\infty} c_v \varphi_v$$

Nous supposons que toutes les opérations effectuées sur cette série sont permises.

Le carré de la norme de la fonction u est

$$(9) \quad E\{u\} = \sum_{v=1}^{\infty} c_v^2$$

puisque le système $\{\varphi_v\}$ est orthonormé. La condition (7) sera la suivante :

$$(10) \quad \sum_{v=1}^{\infty} c_v \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}} \varphi_v(Q_i)}{\partial x^{r_{ij}} \partial y^{s_{ij}}} - a_{ij} = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N; \\ j = 1, 2, \dots, \alpha_i \end{array}$$

Donc notre problème s'est transformé tel qu'on doit chercher le système des coefficients c_1, c_2, \dots qui rend minimum la quantité (9) la condition (10) supposée remplie.

Nous résoudrons ce problème nouveau par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

En multipliant les équations de la condition (10) respectivement par les multiplicateurs λ_{ij} et en les ajoutant à la quantité (9), on doit chercher le système c_1, c_2, \dots qui rend minimum la quantité

$$L = \sum_{v=1}^{\infty} c_v^2 + \sum_{i,j} \lambda_{ij} \left(\sum_{v=1}^{\infty} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}} \varphi_v(Q_i)}{\partial x^{r_{ij}} \partial y^{s_{ij}}} - a_{ij} \right).$$

Nous égalons à zéro les dérivées partielles de L prises par rapport à c_v ($v = 1, 2, \dots$), et en y ajoutant le système d'équations (10), nous obtenons le système d'équations qui fournit les inconnues c_v et λ_{ij} :

$$(a) \quad 2c_v + \sum_{i,j} \lambda_{ij} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}} \varphi_v(Q_i)}{\partial x^{r_{ij}} \partial y^{s_{ij}}} = 0 \quad (v = 1, 2, \dots)$$

$$(b) \quad \sum_v c_v \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}} \varphi_v(Q_i)}{\partial x^{r_{ij}} \partial y^{s_{ij}}} = a_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N; \\ j = 1, 2, \dots, \alpha_i \end{matrix}$$

Du système partiel (a) d'équations nous obtenons:

$$c_v = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \lambda_{ij} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}} \varphi_v(Q_i)}{\partial x^{r_{ij}} \partial y^{s_{ij}}},$$

tandis que les inconnues λ_{ij} peuvent être calculées du système partiel (b). En remplaçant la valeur de c_v exprimée par les λ_{ij} dans la formule (8), nous obtenons¹⁾

$$\begin{aligned} u(P) &= -\frac{1}{2} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{i,j} \lambda_{ij} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}} \varphi_v(Q_i)}{\partial x^{r_{ij}} \partial y^{s_{ij}}} \varphi_v(P) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \lambda_{ij} \left[\frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}}}{\partial x_Q^{r_{ij}} \partial y_Q^{s_{ij}}} \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v(P) \varphi_v(Q) \right]_{Q=Q_i} = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i,j} \lambda_{ij} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}}}{\partial x_Q^{r_{ij}} \partial y_Q^{s_{ij}}} K(P, Q_i). \end{aligned}$$

Nous avons obtenu que la solution de notre problème peut être exprimée par la fonction

$$(11) \quad u(P) = \sum_{i,j} x_{ij} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}}}{\partial x_Q^{r_{ij}} \partial y_Q^{s_{ij}}} K(P, Q_i)$$

où les inconnues x_{ij} peuvent être déterminées par le système d'équations (7).

Nous allons démontrer maintenant le théorème suivant:

Théorème: 1°. C'est la fonction (11) qui possède en effet la norme minimum parmi les fonctions satisfaisant à la condition (7), et

2°. Les inconnues x_{ij} peuvent être calculées par la condition (7), c'est à dire que le déterminant A du système d'équations linéaires

$$\sum_{k,l} x_{kl} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}}}{\partial x_P^{r_{ij}} \partial y_P^{s_{ij}}} \frac{\partial^{r_{kl}+s_{kl}}}{\partial x_Q^{r_{kl}} \partial y_Q^{s_{kl}}} K(Q_i, Q_k) = a_{ij}$$

¹⁾ L'index Q ajouté aux variables indépendantes dans l'opérateur différentiel signifie que la dérivation s'effectue selon les coordonnées du point Q . Q_i au lieu de Q dans la fonction dérivée signifie qu'on doit premièrement dériver la fonction selon Q , puis remplacer Q par Q_i .

ne s'annule pas :

$$(12) \quad A = \left| \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}}}{\partial x_P^{r_{ij}} \partial y_P^{s_{ij}}} \frac{\partial^{r_{kl}+s_{kl}}}{\partial x_Q^{r_{kl}} \partial y_Q^{s_{kl}}} K(Q_i, Q_k) \right| \neq 0 ,$$

Démonstration: 1°. Toutes les fonctions $v \in \Sigma$ satisfaisant à la condition (7) peuvent être écrites sous la forme

$$v = u + w ,$$

où $w \in \Sigma$, et w satisfait à la condition homogène correspondant à (7) avec $a_{ij} = 0$. Le carré de la norme de la fonction v , en utilisant la propriété reproductrice de la fonction-noyau K et en tenant compte que w satisfait à la condition homogène (7), sera la suivante²⁾ :

$$\begin{aligned} E\{v\} &= E\{u\} + E\{w\} + 2 E\{u, w\} = E\{u\} + E\{w\} + \\ &+ 2 \sum_{i,j} x_{ij} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}}}{\partial x_Q^{r_{ij}} \partial y_Q^{s_{ij}}} E\{K(P, Q_i), w(P)\} = \\ &= E(u) + E\{w\} + 2 \sum_{i,j} x_{ij} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}}}{\partial x^{r_{ij}} \partial y^{s_{ij}}} w(Q_i) = E\{u\} + E\{w\} . \end{aligned}$$

Donc nous obtenons la norme minimum dans le cas où $w \equiv 0$.

2°. Le carré de la norme de la fonction u , en utilisant la propriété reproductrice de la fonction K , sera la suivante :

$$(13) \quad E\{u\} = \sum_{i,j} \sum_{k,l} x_{ij} x_{kl} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}}}{\partial x_P^{r_{ij}} \partial y_P^{s_{ij}}} \frac{\partial^{r_{kl}+s_{kl}}}{\partial x_Q^{r_{kl}} \partial y_Q^{s_{kl}}} K(Q_i, Q_k) \geq 0 .$$

$E\{u\}$ est une forme quadratique des variables x_{ij} positive semidéfinie ou positive définie selon que le déterminant A de cette forme s'annule ou bien ne s'annule pas. Supposons que $A = 0$ pour un choix convenable des points Q_i . Alors il y a un système \bar{x}_{ij} non identique à zéro des variables x_{ij} tel que la forme quadratique (13), et en conséquence $E\{u\}$ s'annule.

Mais il s'ensuit de fait que $E\{u\} = 0$, que $u \equiv 0$, c'est à dire que

$$u = \sum_{i,j} \bar{x}_{ij} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}}}{\partial x_Q^{r_{ij}} \partial y_Q^{s_{ij}}} K(P, Q_i) \equiv 0 .$$

Formons le produit scalaire de tous les deux termes de cette identité avec une fonction arbitraire $v \in \Sigma$:

$$(14) \quad \sum_{i,j} \bar{x}_{ij} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}}}{\partial x^{r_{ij}} \partial y^{s_{ij}}} v(Q_i) \equiv 0 .$$

²⁾ On peut changer de l'ordre de la dérivation et de l'intégration car les fonctions satisfaisantes à l'équation (1), où $q(x, y)$ est analytique, sont analytiques.

Donc si $A = 0$, alors l'équation (14) est valable pour toutes les fonctions $v \in \Sigma$. Nous démontrons que c'est impossible.

Étant $q(P)$ une fonction analytique de toutes ses deux variables dans le domaine fermé $D + C$, il y a un domaine $D_1 \supset D$ où $q(P)$ est encore analytique et positive. Soit $G_1(P, Q)$ la fonction de Green du domaine D_1 par rapport à l'équation (1). Si $Q^* \in D_1 - (D + C)$, alors $G_1(P, Q^*)$ est un élément de la classe Σ concernant le domaine D , et ainsi selon (14)

$$(15) \quad \sum_{i,j} \bar{x}_{ij} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}}}{\partial x_P^{r_{ij}} \partial y_P^{s_{ij}}} G_1(Q_i, Q^*) \equiv 0,$$

où il y a des \bar{x}_{ij} différentes de zéro. Puisque le coté gauche de (15) est une fonction analytique des coordonnées ξ et η du point Q^* , il s'ensuit du principe du prolongement analytique que le coté gauche de (15) s'annule identiquement dans le domaine D . Mais c'est impossible, parceque la fonction $G_1(Q_i, Q^*)$ a une singularité logarithmique au lieu $Q^* = Q_i$. Donc notre hypothèse qu'il existe un système pour lequel $A = 0$, conduit à une contradiction.

(Reçu : 1. VI. 1957.)

LITTÉRATURE

- [1] BERGMAN, S.—SCHIFFER, M.: *Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics*. Academic Press, New-York, 1953.

EGY MAGFÜGGVÉNYEKKEL KAPCSOLATOS INTERPOLÁCIÓS FELADAT ÁLTALÁNOSÍTÁSA

ADLER GY.

Kivonat

A szerző egy, az [1] könyvben szereplő interpolációs feladat általánosítását adja meg. Ez az általánosított feladat a követ kező:

Keressük azt az $u \in \Sigma$ függvényt — itt Σ a

$$\Delta u(x, y) = q(x, y) u(x, y) \quad (q(x, y) > 0)$$

egyenletet kielégítő függvények osztályát jelenti —, mely minimális

$$\sqrt{E\{u\}} = \sqrt{E\{u, u\}} = \sqrt{\int_D [u_x^2 + u_y^2 + qu^2] dx dy}$$

normával rendelkezik és a D tartomány minden egyes Q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) pontjában eleget tesz az α_i számú

$$(7) \quad \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}} u(Q_i)}{\partial x^{r_{ij}} \partial y^{s_{ij}}} = a_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N; \\ j = 1, 2, \dots, \alpha_i \end{matrix}$$

feltételeknek.

A feladat megoldása a

$$K(P, Q) = \sum_{r=1}^{\infty} \varphi_r(P) \varphi_r(Q)$$

magfüggvénnyel az

$$u(P) = \sum_{i,j} x_{ij} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}}}{\partial x^{r_{ij}} \partial y^{s_{ij}}} K(P, Q_i)$$

alakban fejezhető ki, ahol a x_{ij} ismeretlenek a (7) egyenletrendszerből határozhatók meg. A szerző megmutat egy heurisztikus módszert, amellyel a megoldás megkonstruálható, majd bebizonyítja, hogy az így nyert függvény valóban megoldása a problémának.

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧИ, СВЯЗАННОЙ С ЯДЕРНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

GY. ADLER

Резюме

Автор даёт обобщение интерполяционной задачи, фигурирующей в упомянутой в списке литературы книге. Эта задача состоит в следующем:

Ищется такая функция $u \in \Sigma$, где Σ обозначает класс функций, удовлетворяющих уравнению

$$\Delta u(x, y) = q(x, y) u(x, y) \quad (q(x, y) > 0),$$

которая обладает наименьшей нормой

$$\sqrt{E\{u\}} = \sqrt{E\{u, u\}} = \sqrt{\iint_D [u_x^2 + u_y^2 + qu^2] dx dy}$$

и в каждой точке Q_i ($i = 1, 2, \dots, N$) области D удовлетворяет α_i условиям

$$(7) \quad \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}} u(Q_i)}{\partial x^{r_{ij}} \partial y^{s_{ij}}} = a_{ij} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N, \\ j = 1, 2, \dots, \alpha_i. \end{matrix}$$

Решение задачи с ядром

$$K(P, Q) = \sum_{v=1}^{\infty} \varphi_v(P) \varphi_v(Q)$$

может быть выражено в виде

$$u(P) = \sum_{i,j} x_{ij} \frac{\partial^{r_{ij}+s_{ij}}}{\partial x_Q^{r_{ij}} \partial y_Q^{s_{ij}}} K(P, Q_i)$$

где неизвестные x_i могут быть определены из системы уравнений (7).

Автор показывает наводящий метод, с помощью которого решение может быть получено, после чего доказывает, что таким образом полученная функция действительно является решением уравнения.

СОДЕРЖАНИЕ

EGERVÁRY, J.: Обоснование и построение общей теории висящих мостов с помощью теории матриц	3
MEDGYESSY, P.: Механический функциональный синтезатор	33
RÉNYI, A.: О функции распределения $L(z)$	43
RÉVÉSZ, P.: О сходимости последовательностей, состоящих из случайных величин	51
SARKADI, K.: Обобщенные гипергеометрические распределения	59
TAKÁCS, L.: О процессах порожденных многомерными процессами Poisson-a	71
TAKÁCS, L.: Об одной задаче о блуждании	81
TAKÁCS, L.: Об обобщении теории восстановления	91
BÉKÉSSY, A.: Одно обобщение метода Laplace-a	105
RÓZSA, P.: О явном решении линейных дифференциальных и разностных уравнений, удовлетворяющих общим начальным условиям	127
ADLER, GY.: Обобщение одной интерполяционной задачи, связанной с ядерными функциями	145

INDEX

EGERVÁRY, J.: Begründung und Darstellung einer allgemeinen Theorie der Hängebrücken mit Hilfe der Matrizenrechnung.....	3
MEDGYESSY, P.: A mechanical functional synthesizer.....	33
RÉNYI, A.: On the distribution function $L(z)$	43
RÉVÉSZ, P.: On the convergence of sequences of random variables (A remark on a problem of A. Prékopa).....	51
SARKADI, K.: Generalized hypergeometric distributions.....	59
TAKÁCS, L.: On secondary stochastic processes generated by a multidimensional Poisson process	71
TAKÁCS, L.: On random walk problems.....	81
TAKÁCS, L.: On a generalization of the renewal theory.....	91
BÉKÉSSY, A.: Eine Verallgemeinerung der Laplaceschen Methode.....	105
RÓZSA, P.: On the explicit solution of differential and difference equations satisfying general initial conditions.....	127
ADLER, GY.: Généralisation d'un problème de l'interpolation en connexion avec les fonctions-noyau	145

4307.801

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

II. ÉVFOLYAM, 3—4. FÜZET
1957



ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ
ТОМ II, ВЫПУСК 3—4.
1957



PUBLICATIONS
OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME II, FASC. 3—4.
1957



1958

TARTALOMJEGYZÉK

ADLER Gy.: A hővezetés egyenletének variációszámítási jellemezhetőségéről	153
BIHARI I.: Sturm oszcillációs és összehasonlítási tételeinek kiterjesztése bizonyos másod- rendű nem-lineáris differenciálegyenletek megoldásaira	159
TAKÁCS L.: Néhány megjegyzés bolyongási feladatokkal kapcsolatban	175
VINCZE I.: Két minta összehasonlítása a mintaelemek két statisztikai függvénye alapján	183
ÁDÁM A.: Kétpólusú elektromos hálózatokról, I.	211
ÉLTető Ö.—SÁRKADI K.: Paradicsomsűrítmények mikrobiológiai ellenőrzésénél fellépő statisztikai problémákról	219
JUNG G.—RÓZSA P.—SÁRKÁNY Gy.: Ellenáramú szétválasztó vegyipari alapl műveletek elméleti fokozatszámának meghatározásáról, I.	227
RÉNYI A.: Szénszemcsés ellenállások vizsgálata valószínűségszámítási módszerrel . .	247
A Matematikai Kutató Intézet szemináriumában 1957-ben elhangzott előadások kivonatai	257
Az Intézet munkatársainak az Intézet munkájának eredményeit tartalmazó, 1957. január 1. óta másutt megjelent vagy sajtó alatt levő dolgozatainak jegyzéke	271

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA

MATEMATIKAI
KUTATÓ INTÉZETÉNEK
KÖZLEMÉNYEI

II. ÉVFOLYAM, 3—4. FÜZET

1957



ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ТОМ II, ВЫПУСК 3—4.

1957



PUBLICATIONS
OF THE
MATHEMATICAL INSTITUTE
OF THE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

VOLUME II, FASC. 3—4.

1957



1958

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI

«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»
CÍMŰ KIADVÁNSOROZAT FOLYTATÁSA

SZERKESZTI: RÉNYI ALFRÉD

TECHNIKAI SZERKESZTŐ: LIPTÁK TAMÁS

A SZERKESZTŐSÉG CÍME: MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET
BUDAPEST, V., REÁLTANODA U. 13/15.

A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI az Intézet tudományos eredményeit tartalmazó és egyéb, főként a matematika gyakorlati alkalmazásaival kapcsolatos dolgozatokat közölnek. A folyóirat minden évfolyama 4 füzetből áll, és kb. 30 nyomdai terjedelmű. A dolgozatok vagy magyarul jelennek meg két világnyelven írott részletes kivonattal, vagy valamelyik világnyelven, magyar és még egy világnyelven írt kivonattal. Cserekapcsolatok felvétele érdekében kérjük a szerkesztőséghez fordulni.

A folyóirat a „Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei” című kiadvánsorozat folytatása, melynek 3 kötete jelent meg [I. kötet (1952); II. kötet (1953); III. kötet (1954)].

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ

ПРОДОЛЖЕНИЕ ИЗДАНИИ
«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»
(ТРУДЫ ИНСТИТУТА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ АКАДЕМИИ НАУК ВЕНГРИИ)

РЕДАКТОР: ALFRÉD RÉNYI

ТЕХНИЧЕСКИЙ РЕДАКТОР: TAMÁS LIPTÁK

АДРЕС РЕДАКЦИИ: МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
BUDAPEST, V., REÁLTANODA U. 13/15.

В ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА печатаются статьи содержащие результаты научно-исследовательской работы Института, и другие статьи по преимуществу связанные с практическими приложениями математики. Каждый том журнала выходит в 4 выпусках, в 30 печатных листах приблизительно. Статьи опубликованы или на венгерском языке с подробным резюме на двух мировых языках, или на каком-то мировом языке с резюме на венгерском и каком-то другом языке. Заказы при нимает предприятие по внешней торговле книг и газет «Kultúra» (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21.). Текущий счет IO 45-790-057-50-032. № поводу отношения обмена просим обращаться непосредственно к редакции.

Журнал является продолжением издания «A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei» от которого вышли в свет 3 тома [том I. (1952); том II. (1953); том III. (1954)].

PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

CONTINUING THE SERIES
«A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA ALKALMAZOTT MATEMATIKAI INTÉZETÉNEK KÖZLEMÉNYEI»
(PUBLICATIONS DE L'INSTITUTE DES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DE L'ACADÉMIE
DES SCIENCES DE HONGRIE)

EDITOR: ALFRÉD RÉNYI

TECHNICAL EDITOR: TAMÁS LIPTÁK

ADDRESS: MATHEMATICAL INSTITUTE
BUDAPEST, V., REÁLTANODA U. 13/15.

THE PUBLICATIONS OF THE MATHEMATICAL INSTITUTE are publishing papers containing the results of the scientific work of the Institute and other papers, especially on the practical applications of mathematics. The journal is published quarterly, 4 issues are forming one volume, consisting of about 30 printed lists. The papers appear in Hungarian with abstracts in two world-languages or in a world-language with abstracts in Hungarian and in an other world-language. For subscription please write to the trade organization „Kultúra” (Budapest, VI., Népköztársaság útja 21.) Cheque No. 45-790-057-50-032. For establishing exchange relations please write to the editor.

The journal continues the series „A Magyar Tudományos Akadémia Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei” of which 3 volumes were published [Vol. I. (1952); Vol. II. (1953); Vol. III. (1954)].

SULLA CARATTERIZZABILITÀ DELL'EQUAZIONE DEL CALORE DAL PUNTO DI VISTA DEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

GYÖRGY ADLER

È ben noto che due equazioni alle derivate parziali spesso adoperate nella fisica matematica, e cioè l'equazione di Laplace

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

e l'equazione delle onde

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

possono essere considerate come equazioni di Euler¹⁾ dei problemi seguenti del calcolo delle variazioni [1] (pp. 244—247):

$$(1') \quad \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 \right] d\tau = \int F_1 d\tau = \text{minimo},$$

risp.

$$(2') \quad \int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right] d\tau = \int F_2 d\tau = \text{minimo},$$

dove gli integrali si riferiscono a qualche dominio dello spazio (x_1, \dots, x_n) risp. dello spazio $(x_1, \dots, x_n; t)$.

L'equazione (1) è di tipo ellittico, e quella (2) di tipo iperbolico. Il fatto che queste equazioni possono essere considerate come equazioni di Euler dei problemi del calcolo delle variazioni è di grande importanza da molti punti di vista, così per esempio dal punto di vista della soluzione numerica di queste equazioni.

Si imposta il problema di per sé se l'equazione del calore di tipo parabolico:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

¹⁾ Questo è vero in generale anche per equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico ed iperbolico a coefficienti non costanti [2] (p. 893).

possa essere considerata come equazione di Euler di qualche problema del calcolo delle variazioni. Le nostre ricerche precedenti hanno dato un solo risultato negativo che sorprende, risultato che può essere dimostrato in modo molto semplice.

Teorema. *Non esiste una tale funzione $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ analitica in qualche dominio R dello spazio $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, che l'equazione di Euler appartenente al problema*

$$(3) \quad \delta \int_D F(x, t; u, u_x, u_t) dx dt = 0$$

del calcolo delle variazioni (dove D significa qualche subdominio di R e supponiamo che anche i valori in questione delle funzioni u, u_x ed u_t si trovano nel dominio R) sia l'equazione

$$(4) \quad \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

del calore.

Dimostrazione. Supponiamo che esista una tale funzione analitica $F(x, t; u, u_x, u_t)$. Sviluppiamo questa funzione in serie nell'intorno di un punto del dominio D , che sia — senza restrizione della generalità — l'origine del sistema di coordinati:

$$F = \sum_{k,l,m,p,q} a_{k,l,m,p,q} x^k t^l u^m u_x^p u_t^q.$$

L'equazione di Euler del problema (3) è:

$$(5) \quad F_u - \frac{dF_{u_x}}{dx} - \frac{dF_{u_t}}{dt} = 0.$$

Sostituendovi la serie di sopra della funzione F , l'equazione (5) ha la forma seguente:

$$(6) \quad \begin{aligned} & \sum x^\alpha t^\beta u^\gamma u_x^\delta u_t^\varepsilon [(1-\delta-\varepsilon)(\gamma+1)a_{\alpha,\beta,\gamma+1,\delta,\varepsilon} - (\delta+1)(\alpha+1)a_{\alpha+1,\beta,\gamma,\delta+1,\varepsilon} - \\ & \quad - (\varepsilon+1)(\beta+1)a_{\alpha,\beta+1,\gamma,\delta,\varepsilon+1}] - \\ & - u_{xx} \sum x^\alpha t^\beta u^\gamma u_x^\delta u_t^\varepsilon [(\delta+1)(\delta+2)a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta+2,\varepsilon}] - \\ & - u_{tt} \sum x^\alpha t^\beta u^\gamma u_x^\delta u_t^\varepsilon [(\varepsilon+1)(\varepsilon+2)a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon+2}] - \\ & - u_{xt} \sum x^\alpha t^\beta u^\gamma u_x^\delta u_t^\varepsilon [2(\delta+1)(\varepsilon+1)a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta+1,\varepsilon+1}] = 0. \end{aligned}$$

Per dimostrare l'affermazione si deve far vedere che il primo membro dell'equazione (6) non può essere di forma

$$(6^*) \quad \Phi(x, t; u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) [u_{xx} - u_t],$$

dove $\Phi \not\equiv 0$ perchè, altrimenti divisa l'equazione con Φ , otterremo l'equazione (4) del calore.

Considerato che nell'equazione (6) tra i moltiplicatori di u_{xx} soltanto le derivate parziali della funzione u di primo ordine, al più, possono riscontrarsi, Φ non può dipendere dalle derivate parziali di u di secondo ordine. Dunque nell'equazione (6) i termini contenenti le derivate u_{xt} ed u_{tt} s'annullano. Questo significa che

- (a) $a_{k,l,m,p,q} = 0$ se $q > 1$,
 (b) ed $a_{k,l,m,p,q} = 0$ se $p > 0$ e $q > 0$ nello stesso tempo.

Il moltiplicatore di u_{xx} nell'equazione (6) è:

$$- \sum x^\alpha t^\beta u^\gamma u_x^\delta u_t^\varepsilon (\delta+1)(\delta+2) a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta+2,\varepsilon},$$

mentre il moltiplicatore di $-u_t$ è:

$$\begin{aligned} & - \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=0,\varepsilon=1}^{\infty} x^\alpha t^\beta u^\gamma u_x^\delta u_t^{\varepsilon-1} [(1-\delta-\varepsilon)(\gamma+1) a_{\alpha,\beta,\gamma+1,\delta,\varepsilon} - (\delta+1)(\alpha+1) a_{\alpha+1,\beta,\gamma,\delta+1,\varepsilon} - \\ & \quad - (\varepsilon+1)(\beta+1) a_{\alpha,\beta+1,\gamma,\delta,\varepsilon+1}] = \\ & = - \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon=0}^{\infty} x^\alpha t^\beta u^\gamma u_x^\delta u_t^\varepsilon [(-\delta-\varepsilon)(\gamma+1) a_{\alpha,\beta,\gamma+1,\delta,\varepsilon+1} - (\delta+1)(\alpha+1) a_{\alpha+1,\beta,\gamma,\delta+1,\varepsilon+1} - \\ & \quad - (\varepsilon+2)(\beta+1) a_{\alpha,\beta+1,\gamma,\delta,\varepsilon+2}]. \end{aligned}$$

Questi due moltiplicatori devono essere identici, dunque i coefficienti nelle serie di questi moltiplicatori si devono identificare:

$$\begin{aligned} & (\delta+1)(\delta+2) a_{\alpha,\beta,\gamma,\delta+2,\varepsilon} = \\ (7) \quad & = (-\delta-\varepsilon)(\gamma+1) a_{\alpha,\beta,\gamma+1,\delta,\varepsilon+1} - (\delta+1)(\alpha+1) a_{\alpha+1,\beta,\gamma,\delta+1,\varepsilon+1} - \\ & - (\varepsilon+2)(\beta+1) a_{\alpha,\beta+1,\gamma,\delta,\varepsilon+2}. \end{aligned}$$

Nel caso di $\varepsilon=0$, in virtù dei risultati sotto (a) e (b) otteniamo da (7), che

$$(c) \quad a_{k,l,m,p,q} = 0 \text{ se } p > 1.$$

Sommati i risultati sotto (a), (b) e (c) vediamo che i coefficienti $a_{k,l,m,p,q}$ si devono annullare, eccetto i seguenti tre casi possibili:

1. $p=0, q=0$;
2. $p=0, q=1$;
3. $p=1, q=0$.

Dunque la funzione F può essere soltanto della seguente forma:

$$F = \sum_{k,l,m} x^k t^l u^m (a_{k,l,m,0,0} + a_{k,l,m,1,0} u_x + a_{k,l,m,0,1} u_t).$$

Si verifica con una semplice sostituzione che con la suddetta scelta della funzione F l'equazione (6) di Euler non contiene nessuna derivata della funzione u , e così quella non può essere di forma (6*), dove abbiamo supposto $\Phi \neq 0$. Qu. e. d.

Questo risultato è sorprendente perchè, da un lato le funzioni F_1 e F_2 figuranti nei problemi (1') e (2'), problemi che hanno per equazioni di Euler quelle (1) e (2) di tipo ellittico risp. iperbolico, sono semplici polinomi delle

sue variabili, dall'altro un problema conducente a una equazione di tipo parabolico non può essere prodotto nemmeno con l'aiuto di una funzione analitica.

La difficoltà di costruire un problema che abbia come equazione di Euler quella (4), può essere messa in chiaro mediante il processo seguente.

L'equazione (4) può essere ottenuta da quella

$$(8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\varepsilon > 0)$$

di tipo ellittico in caso che $\varepsilon \rightarrow 0$. È facile costruire un problema del calcolo delle variazioni che ha come equazione di Euler l'equazione (8). Questo problema è il seguente:

$$\delta \int_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - u \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2\varepsilon} u^2 \right] e^{-\frac{1}{\varepsilon} t} dx dt = 0.$$

Si può vedere che, in caso che $\varepsilon \rightarrow 0$, questo problema perde il significato e così il tentativo di produrre nel modo suddetto un problema che conduca all'equazione (4), fallisce.

(Ricevuto: 15. XII. 1957.)

BIBLIOGRAFIA

- [1] COURANT, R.—HILBERT, D.: *Methods of mathematical physics*. Interscience Publishers, New York — London, 1953.
 [2] FRANK, PH.—MISES, R. VON: *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*. Vieweg, Braunschweig, 1930.

A HŐVEZETÉS EGYENLETÉNEK VARIÁCIÓSZÁMÍTÁSI JELLEMEZHETŐSÉGÉRŐL

ADLER GY.

Kivonat

A szerző azzal a problémával foglalkozik, hogy a hővezetés egyenlete tekinthető-e valamilyen variációszámítási feladat Euler-egyenletének. E kérdés felvetése azért természetes, mert ismeretes, hogy a Laplace-egyenlet és a hullámgörbe felfoghatók megfelelő variációszámítási feladatok Euler-egyenleteiként. Erre vonatkozóan a szerző a következő, negatív választ adó tételt bizonyítja be:

Tétel. Nem létezik olyan, az $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tér valamely R tartományában analitikus $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ függvény, amelyhez tartozó

$$(3) \quad \delta \int_D F(x, t; u, u_x, u_t) dx dt = 0$$

variációszámítási probléma (ahol D az R tartomány valamely résztartományát

jelenti, és feltételezzük, hogy u , u_x és u_t szóba jövő értékei szintén az R tartományba esnek) Euler-egyenlete a hővezetés

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

differentiálegyenlete.

ВАРИАЦИОННО-ИСЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИЗИРУЕМОСТИ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

GY. ADLER

Резюме

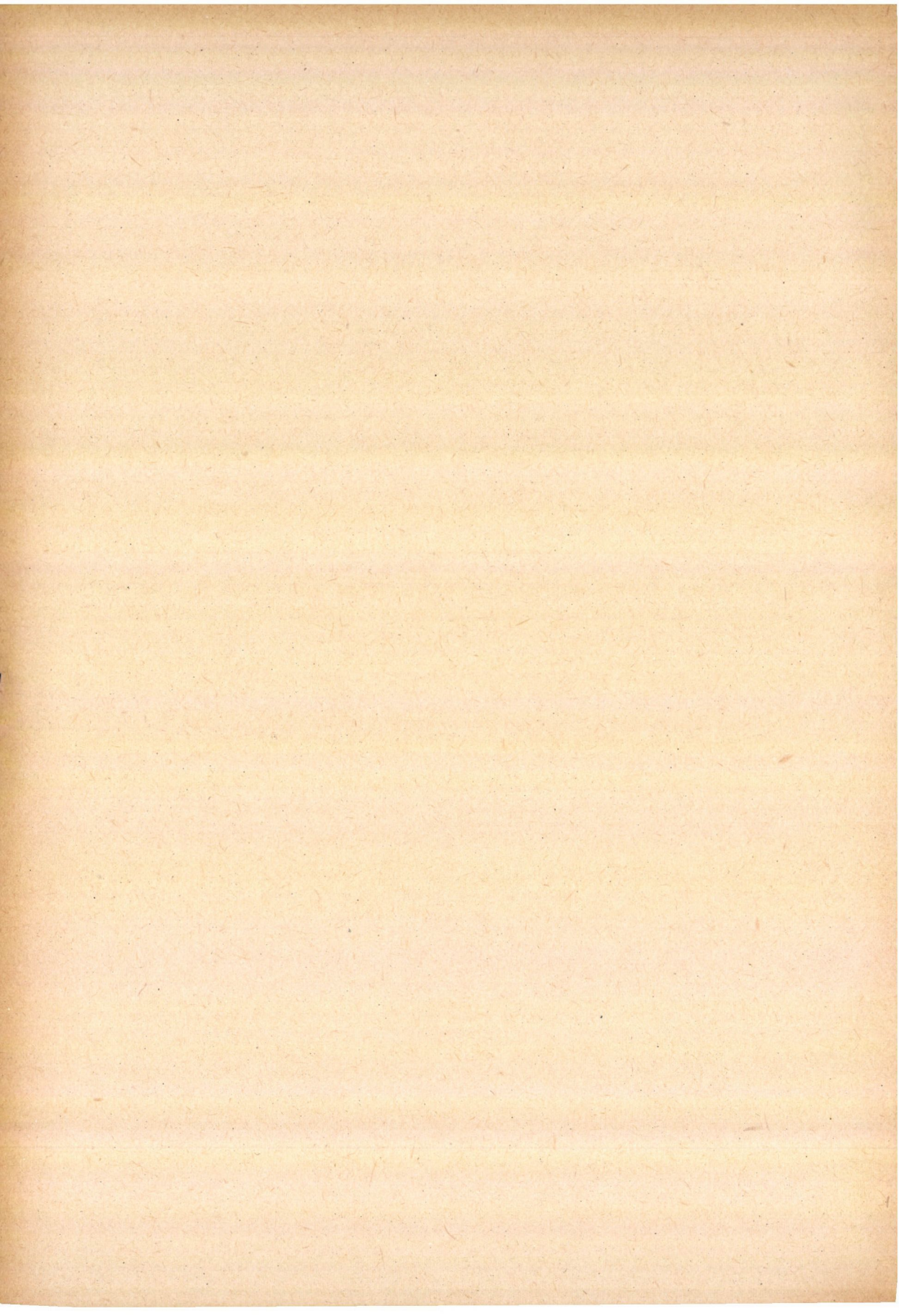
Автор занимается следующей задачей: является ли уравнение теплопроводности уравнением Euler-а некоторой вариационной задачи? Постановка этого вопроса естественна, потому что известно, что уравнение Laplace-а и волновое уравнение могут быть рассмотрены, как уравнения Euler-а соответствующей вариационной задачи. Он доказывает следующую теорему, дающую отрицательный ответ:

Теорема. Не существует такой, аналитической в некоторой области R пространства $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ функции $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, что вариационная задача

$$(3) \quad \delta \int_D F(x, t; u, u_x, u_t) dx dt = 0$$

(где D является некоторой подобластью области R и предполагается, что допустимые значения u , u_x и u_t также принадлежат области R) имеет уравнением Euler дифференциальное уравнение теплопроводности

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$



AUSDEHNUNG DER STURMSCHEN OSCILLATIONS- UND VERGLEICHSSÄTZE AUF DIE LÖSUNGEN GEWISSE NICHT-LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG

IMRE BIHARI ¹⁾

Die Beweise der im Titel genannten auf *lineare* Gleichungen bezüglichen Sätze, die die Natur der Sache am besten beleuchten, stammen von H. PRÜFER und E. KAMKE [1] (insbesondere S. 502—505), [2], [3]. Der Zweck dieser Abhandlung ist eben zu überprüfen, wie weit man mit denselben Methoden in der Untersuchung ähnlicher Probleme von nicht-linearen Gleichungen und Systemen gelangen kann. — Wir bemerken in folgenden mehrmals, dass der weitere Beweis ebenso verläuft, wie an einer Stelle der erwähnten Abhandlungen. Doch enthält diese Abhandlung auch mehrere Ergänzungen und Beweise, die die Verallgemeinerung erfordert.

1. §. Ausdehnung des Oscillationssatzes

Von grundlegender Wichtigkeit ist der folgende, sich auf gewöhnliche, lineare Gleichungen von der zweiten Ordnung beziehende Satz, den wir aus [2] S. 277. wörtlich zitieren:

„Im Intervall $a \leq x \leq b$ sei $P(x)$ stetig und > 0 . Ferner sei $Q(x, \lambda)$ im Bereich $a \leq x \leq b$, $-\infty < \lambda < +\infty$ stetig,

$$Q(x, \lambda) < Q(x, \lambda^*), \text{ wenn } \lambda < \lambda^*$$

und gleichmässig für $a \leq x \leq b$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} Q(x, \lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} Q(x, \lambda) = +\infty.$$

Dann gibt es für jede auf die Gleichung

$$(1) \quad \frac{d}{dx} (P(x)y') + Q(x, \lambda)y = 0$$

bezügliche allgemeine Sturmsche Randwertaufgabe unendlich viele Eigenwerte. Die Gesamtheit der zu einer solchen Randwertaufgabe gehörigen

¹⁾ Polytechnic University of Budapest, 1st Department of Mathematics.

Eigenwerte λ lässt sich als eine monoton wachsende und gegen $+\infty$ konvergierende Zahlenfolge $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ schreiben. Die sämtlichen zu einem Eigenwert λ_n gehörigen Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ haben stetige Ableitungen und unterscheiden sich nur durch konstante von Null verschiedene Faktoren. Jede Eigenfunktion $\varphi_n(x)$ hat im offenen Intervall (a, b) genau n Nullstellen.“

Die hier grundgelegten Sturmschen homogenen Randbedingungen sind

$$(P) \quad \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0, \quad (\alpha^2 + \beta^2 > 0, \gamma^2 + \delta^2 > 0).$$

Die erwähnte Behandlungsmethode besteht darin, dass man die Gleichung auf das System

$$(2) \quad y' = \frac{1}{P}z, \quad z' = -Qy$$

zurückführt und das mit Anwendung von Polarkoordinaten — durch die Transformation²⁾ $y = \varrho \sin \delta$, $z = \varrho \cos \delta$ — in das System

$$\delta' = \frac{1}{P} \cos^2 \delta + Q \sin^2 \delta$$

$$\varrho' = \varrho \sin \delta \cos \delta \left(\frac{1}{P} - Q \right)$$

überführt, wo das wesentliche und das wichtige ist, dass die erste Gleichung nur δ enthält und die rechte Seite einen solchen eigentümlichen Aufbau hat.

Nun haben wir die allgemeinste nicht-lineare Gleichung von der Form

$$(4) \quad \frac{d}{dx} (P(x)y') + Q(x, \lambda)f(y, y') = 0$$

aufzusuchen, bei der dieselbe Erscheinung eintritt. Die Gleichung (4) ist gleichwertig mit dem System

$$(5) \quad y' = \frac{1}{P}z, \quad z' = -Qf\left(y, \frac{1}{P}z\right).$$

Mit Einführung von Polarkoordinaten kann das so geschrieben werden

$$(6) \quad \begin{aligned} \varrho' \sin \delta + \varrho \cos \delta \cdot \delta' &= \frac{1}{P} \varrho \cos \delta \\ \varrho' \cos \delta - \varrho \sin \delta \delta' &= -Qf\left(\varrho \sin \delta, \frac{1}{P} \varrho \cos \delta\right), \end{aligned}$$

woraus

$$\delta' = \frac{1}{P} \cos^2 \delta + Q \frac{f\left(\varrho \sin \delta, \frac{1}{P} \varrho \cos \delta\right)}{\varrho} \sin \delta.$$

Die rechte Seite wird von ϱ genau dann unabhängig sein, wenn $f(u, v)$

²⁾ ϱ und δ sind Funktionen von x .

bezüglich u und v homogen linear von dem ersten Grade ist, d.h. $f(\lambda u, \lambda v) = \lambda f(u, v)$.

Dann haben wir

$$f\left(\varrho \sin \delta, \frac{1}{P} \varrho \cos \delta\right) = \varrho f\left(\sin \delta, \frac{1}{P} \cos \delta\right),$$

folglich

$$(7) \quad \delta' = \frac{1}{P} \cos^2 \delta + Q f\left(\sin \delta, \frac{1}{P} \cos \delta\right) \sin \delta.$$

Aus (6) bekommen wir für ϱ

$$(8) \quad \varrho' = \varrho \cos \delta \left[\frac{1}{P} \sin \delta - Q f\left(\sin \delta, \frac{1}{P} \cos \delta\right) \right].$$

Es wird jetzt gezeigt, dass der obige Oscillationssatz für die Gleichung (4) unverändert gilt — angenommen dass die Funktionen $P(x)$ und $Q(x, \lambda)$ dieselbe Eigenschaften haben, wie dort, und die Funktion $f(u, v)$ den folgenden Bedingungen genügt:

1. Sie ist definiert für beliebige u und v und $f(u, v) \in \text{Lip}(1)$ in allen beschränkten Gebieten,

2. Sie ist für u und v homogen linear von dem ersten Grade, d.h. $f(\lambda u, \lambda v) = \lambda f(u, v)$,

3. $\text{sgf}(u, v) = \text{sg } u$. Z.B. $f(0, v) = 0$ für willkürliche v .

Die Randbedingungen sind auch jetzt unverändert die Bedingungen unter (P).

Bevor wir zum Beweis übergehen, wollen wir einige Eigenschaften der Gleichung (4) feststellen. Es ist klar, dass (4) unter den Anfangsbedingungen $y(\xi) = \eta_0$, $y'(\xi) = \eta_1$, $a \leq \xi \leq b$, $\eta_0^2 + \eta_1^2 > 0$ genau eine Lösung hat. Schreiben wir nämlich die Gleichung (4) in das System (5) um, bei dem die rechten Seiten stetig sind und in einer gewissen Umgebung der Punkt ξ , $y = \eta_0$, $z = P(\xi) \eta_1$, $\eta_0^2 + P(\xi)^2 \eta_1^2 > 0$ für y und z einer Lipschitz Bedingung genügen. — Die obige Lösung existiert im ganzen Intervall $a \leq x \leq b$. Das sieht man so ein: Nehmen wir an, dass die Lösung nur in einem Intervall $a < \alpha < \beta < b$ existiert. Es wird gezeigt, dass es zu einem Widerspruch führt. Beschränken wir uns nur auf dem Beweis von $\beta = b$. Bezeichnen wir eine obere Schranke von $1/P(x)$ und $|Q(x, \lambda)| |f(u, v/P)|$ für $a \leq x \leq b$ und $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$ mit $A > 0$, dann folgt aus (5)³⁾

$$|y'| \leq A|z|, \quad |z'| \leq A(|y| + |z|),$$

woraus

$$|y'| + |z'| \leq A(|y| + |z|) + A|z| \leq 2A(|y| + |z|).$$

³⁾ Mit Rücksicht auf die Eigenschaft 2. hat man

$$f\left(y, \frac{1}{P} z\right) = \sqrt{y^2 + z^2} f\left(\frac{y}{\sqrt{y^2 + z^2}}, \frac{1}{P} \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right)$$

und daraus sieht man die Existenz einer solchen Zahl A sehr leicht ein.

Nach einem bekannten Lemma⁴⁾ gewinnt man hieraus

$$|y| + |z| \leq (\eta_0 + \eta_1 P(\xi)) e^{2A|x-\xi|} \quad (\xi \leq x < \beta),$$

also sind y und z in $\xi \leq x < \beta$ beschränkt. Das ist aber ein Widerspruch gegen der Tatsache, dass die Kurve mit der parametrischen Form $y(x), z(x)$ schon im Intervall $\xi \leq x < \beta$ in eine willkürliche Nähe der Grenze des Gebietes $G(a \leq x \leq b, y \text{ und } z \text{ beliebig})$ gelangt, denn diese Bedingung bedeutet im Falle $\beta < b$, dass die Kurve $y(z), z(x)$ beliebig grosse Ordinate aufnimmt. Darum ist $\beta = b$ und man findet ebenso $\alpha = a$.

$y \equiv 0$ ist eine Lösung der Gleichung. Mit y ist auch cy ($c \neq 0$ ist eine willkürliche Konstante) eine Lösung der Gleichung (4). Daraus und aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt nun, dass zwei Lösungen — y und \bar{y} — nur zusammenfallende Nullstellen haben können, falls sie überhaupt gemeinsame Nullstellen besitzen. — Es sei nämlich $y(\xi) = \bar{y}(\xi) = 0$ und $y'(\xi) = cy'(\xi)$, dann sind die Anfangswerte von \bar{y} und cy einerseits, von \bar{y}' und cy' andererseits bei ξ gleich. \bar{y} und cy sind Lösungen der Gleichung (4), welche aber bei gegebenen Anfangsbedingungen nur eine Lösung hat. Folglich $\bar{y} = cy$ in $a \leq x \leq b$. — S. in [2] S. 278—80. den weiteren Beweis, der sich an die Gleichungen (7) und (8) knüpft. Nur in einem Hilfsatz ([2] S. 276.) haben wir die Bedeutung der Zahl M zu verändern; in unserem Fall hat nämlich M den folgenden Wert

$$M = \frac{1}{2} \min_{a \leq x \leq b} \frac{1}{P(x)} \min_{0 \leq \delta \leq 2\pi} F(\delta),$$

wo

$$F(\delta) = \cos^2 \delta + f\left(\sin \delta, \frac{1}{P} \cos \delta\right) \sin \delta$$

ist und der Richtungstangent der Gerade in der Figur 31. muss einen grösseren Wert als M haben.

2. §. Ausdehnung der Vergleichssätze

Betrachten wir jetzt im Intervall $a \leq x \leq b$ das nicht-lineare System erster Ordnung

$$(9) \quad y' = P(x)g(y, z) + Q(x)G(y, z)$$

$$(10) \quad z' = R(x)h(y, z) + S(x)H(y, z),$$

wo P, Q, R, S in $a \leq x \leq b$ stetige Funktionen bedeuten und $g(u, v), h(u, v), G(u, v), H(u, v)$ genau dieselbe Eigenschaften haben, wie $f(u, v)$ in 1., nur

$$\operatorname{sg} G(u, v) = \operatorname{sg} H(u, v) = \operatorname{sg} v.$$

Dann kann es erstens — ebenso wie in 1. — sehr leicht eingesehen werden, dass die Lösung bei gegebenen Anfangsbedingungen im ganzen

⁴⁾ S. [2] S. 151. Hilfsatz 3.

$a \leq x \leq b$ existiert und eindeutig bestimmt ist, ferner mit y, z auch cy, cz Lösungen sind und alle Nullstellen der beiden Lösungen — y, z und \bar{y}, \bar{z} — zusammenfallen, vorausgesetzt, dass sie gemeinsame Nullstellen besitzen. Wir haben dann $\bar{y} = cy, \bar{z} = cz$.

Durch Einführung von Polarkoordinaten gelangt man zum System

$$(9') \quad \begin{aligned} \delta' &= QG(\sin \delta, \cos \delta) \cos \delta + Pg(\sin \delta, \cos \delta) \cos \delta - \\ &\quad - SH(\sin \delta, \cos \delta) \sin \delta - Rh(\sin \delta, \cos \delta) \sin \delta \end{aligned}$$

$$(10') \quad \begin{aligned} \varrho' &= \varrho \{ [Pg(\sin \delta, \cos \delta) + QG(\sin \delta, \cos \delta)] \sin \delta + \\ &\quad + [Rh(\sin \delta, \cos \delta) + SH(\sin \delta, \cos \delta)] \cos \delta \}. \end{aligned}$$

Wir können bezüglich der Gleichung (9') dieselbe Feststellungen gewinnen, wie die die in [3] 4. und 5. in Verknüpfung mit der dortigen Gleichung (10) stattfinden, angenommen, dass wir — bei dem Variieren der Koeffizientenfunktionen — P und S unverändert lassen und nur Q und R variieren.

So gelangen wir zu der folgenden Verallgemeinerung des in [3] 6. bewiesenen Satzes:

Im $a \leq x \leq b$ seien $P_r(x), \dots, S_r(x)$ ($r = 1, 2$) stetig, $g(u, v)$ $G(u, v)$, $h(u, v)$, $H(u, v)$ wie oben, ferner

$$Q_2 \geq Q_1 > 0, \quad R_2 \leq R_1, \quad P_2 = P_1, \quad S_2 = S_1.$$

Sind $y_r(x), z_r(x)$ Lösungen des Systems

$$\begin{aligned} y' &= P_r(x)g(y, z) + Q_r(x)G(y, z) \\ z' &= R_r(x)h(y, z) + S_r(x)H(y, z) \end{aligned} \quad (r = 1, 2)$$

und ist $y_1(a) = 0$, oder sind

$$y_1(a) \neq 0, \quad y_2(a) \neq 0, \quad \frac{z_1(a)}{y_1(a)} \geq \frac{z_2(a)}{y_2(a)},$$

dann gilt:

a) $y_2(x)$ hat in $a \leq x \leq b$ mindestens so viele Nullstellen, als $y_1(x)$; sind x_n, \bar{x}_n die n -ten Nullstellen von y_1, y_2 , dann $\bar{x}_n \leq x_n$; ja sogar $\bar{x}_n < x_n$, wenn mindestens an einer Stelle von $a \leq x \leq b$

$$(F) \quad Q_2 > Q_1 \quad \text{und} \quad |R_1| + |R_2| > 0, \quad \text{oder} \quad R_2 < R_1.$$

b) Haben y_1 und y_2 gleich ν viele Nullstellen in $a < x < b$ und sind $y_1(b) \neq 0, y_2(b) \neq 0$, ferner gilt mindestens an einer Stelle von $a \leq x \leq b$ die Bedingung (F), dann

$$\frac{z_1(b)}{y_1(b)} > \frac{z_2(b)}{y_2(b)}.$$

Es sei noch bemerkt: Haben zwei Lösungen — y, z und \bar{y}, \bar{z} — keine zusammenfallenden Nullstellen, dann folgen die Nullstellen von y und \bar{y} wechselnd aufeinander. Der Vergleichssatz kann natürlich sofort auf die Gleichung (4) von 1. ausgedehnt werden, aber wir verzichten auf dessen Abfassung.

3. §. Ein Beispiel

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$(11) \quad y'' + \frac{\lambda y^3}{y^2 + y'^2} = 0$$

mit den Randbedingungen $y(-1) = y(1) = 0$. — Die Eigenwerte sind hier positiv. Ist nämlich $\lambda = 0$, dann $y = c_1 x + c_2$. Ist $\lambda < 0$, dann ist die Kurve von y von der Seite der Achse x her konvex. In keinen der beiden Fälle können die Randbedingungen erfüllt sein. Die Lösung der Gleichung kann für $y > 0$ (oder $y < 0$) in der folgenden parametrischen Form aufgeschrieben werden

$$x = \int \frac{f(u, \lambda)}{u} du + c_1, \quad y = c_2 e^{\int f(u, \lambda) du}, \quad \text{mit} \quad f(u, \lambda) = -\frac{u(1+u^2)}{u^2(1+u^2) + \lambda}.$$

Betrachten wir die Eigenfunktion $\varphi_0(x)$, die zum kleinsten Eigenwert $\lambda = \lambda_0$ gehört und in $-1 < x < 1$ nicht verschwindet, ferner $\varphi_0(0) = 1$. — $\varphi_0(x)$ ist symmetrisch auf die Achse Y und $\varphi_0'(0) = 0$. — $\psi(x) \equiv \varphi_0(-x)$ ist nämlich auch eine Eigenfunktion, da $\psi(x)$ den Randbedingungen und der Gleichung (11) genügt, wie man sofort sieht. $\psi(x)$ gehört auch zum Eigenwert λ_0 und $\psi(0) = \varphi_0(0)$, also $\psi(x) \equiv \varphi_0(x)$, denn die zum denselben Eigenwert gehörigen Eigenfunktionen können sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Diese Funktion ist folglich symmetrisch auf die Achse Y (sie ist eine gerade Funktion). — Den Werten $x = -1, 0, 1$ entsprechen die Werte $u = +\infty, 0, -\infty$. Die Funktion $\varphi_0(x)$ hat also die Parameterform

$$(11') \quad x = \int_0^u \frac{f(t, \lambda)}{t} dt, \quad y = e^{\int_0^u f(t, \lambda) dt} \quad (\lambda = \lambda_0, \quad -1 \leq x \leq 1).$$

In der Tat,

$$\int_0^{\pm\infty} f(u, \lambda) du = -\infty$$

und so $y(-1) = y(1) = 0$. Das Integral

$$\int_0^{\pm\infty} \frac{f(u, \lambda)}{u} du$$

aber konvergiert und hat den Wert ∓ 1 . Der Eigenwert λ_0 — der nach dem Satz existiert — ist folglich aus der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u, \lambda)}{u} du = -2$$

bestimmbar, als eine positive Wurzel dessen, aber wir können nicht behaupten, dass λ_0 die kleinste ist, denn die Form (11') bezieht sich nur auf λ_0 bzw. $\varphi_0(x)$. Umgekehrt: man kann sich unmittelbar überzeugen, dass diese

Gleichung positive Wurzel hat und so gewinnen wir einen direkten Beweis der Existenz der entsprechenden Eigenfunktion.

Ist $\bar{\varphi}_1(x)$ die zum kleinsten Eigenwert $\bar{\lambda}_0$ gehörige Eigenfunktion der auf $0 \leq x \leq 1$ bezüglichen Randwertaufgabe $y(0) = y(1) = 0$, die in $0 < x < 1$ nicht verschwindet, dann ist die Funktion

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \bar{\varphi}_1(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ -\bar{\varphi}_1(-x) & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

die zum zweiten Eigenwert $\lambda = \lambda_1$ gehörige zweite Eigenfunktion der auf $-1 \leq x \leq 1$ bezüglichen Randwertaufgabe, denn auch diese erfüllt die entsprechenden Randbedingungen und die Gleichung (11), ferner sie verschwindet in $-1 < x < 1$ genau einmal (im Anfangspunkt). — Es ist also eine ungerade Funktion und ihre „Halbwellen“ sind auf ihre Extremenpunkte symmetrisch. Der Eigenwert λ_1 ist eine positive Wurzel der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u, \lambda)}{u} du = -1.$$

Ähnlicherweise ist der folgende Eigenwert $\lambda = \lambda_2$ eine positive Wurzel der Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u, \lambda)}{u} du = -\frac{2}{3}.$$

Die entsprechende Eigenfunktion ist gerade und ihre Halbwellen zeigen die obige Symmetrie-Eigenschaft und sind kongruent. Die Wendepunkte sind immer an der Achse x und die Halbwellen sind abwechselnd konvex und konkav, u.s.w.

(Der n -te Eigenwert genügt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u, \lambda)}{u} du = -\frac{2}{n+1}.)$$

Da statt $[-1, 1]$ jedes anderes Intervall genommen werden kann, ist es offenbar, dass (11) auch periodische Lösungen mit willkürlichen „Wellenlängen“ hat [nämlich die zum entsprechenden Intervall gehörige und auf beliebige x fortgesetzte Funktion $\varphi_1(x)$], die die obige Symmetrie-Eigenschaft zeigen.

Unserer Gedankengang bleibt für die allgemeinere Gleichung

$$y'' + \lambda f(y, y') = 0$$

unverändert gültig, falls $f(y, y')$ eine Funktion bedeutet, wie in 1.

4. §. Vergleichssätze für die Grössenanordnung

Die folgenden Sätze sind — auch für die allgemeinste Gleichung (4) mit $P(x) \equiv 1$ — offenbar einfache Folgerungen des obigen zweiten verallgemeinerten Sturmschen Vergleichssatzes. Doch zeigen wir hier an einem Beispiel für die hier verwendeten zwei Spezialfälle einen anderen Beweis des Satzes, der — im Gegensatz zu dem ersten Beweis — nicht nur auf die Gleichung (4) mit sondern auch auf andere nicht-lineare Gleichungstypen anwendbar ist. Solcher Typ ist z.B. die Gleichung

$$y'' + \varphi(x)f(y)h(y') = 0,$$

die in einer in den Acta Math. Hung. erscheinenden Abhandlung des Verfassers behandelt wird.

Betrachten wir die Gleichung

$$(4') \quad y'' + Q(x, \lambda) \frac{y^3}{y^2 + y'^2} = 0$$

($Q(x, \lambda)$ genügt den in 1. gestellten Bedingungen.) — Wie wir sahen — hat sie bei bestimmten Werten λ oscillierende Lösungen und nimmt bei grösseren λ die Anzahl der Oscillationen zu. Nehmen wir z.B. die Randbedingungen $y(0) = y(1) = 0$ an. — Der obige Oscillationssatz schliesst die Anordnung der Figur nicht aus, d.h., dass die erste Halbwellen einer Eigenfunktion $\varphi_k(x)$ mit grösserer Index diese von $\varphi_i(x)$ mit kleinerer Index durchschneide, vorausgesetzt, dass $\varphi_i'(0) \geq \varphi_k'(0) > 0$ oder $\varphi_i'(0) \leq \varphi_k'(0) < 0$ ist.

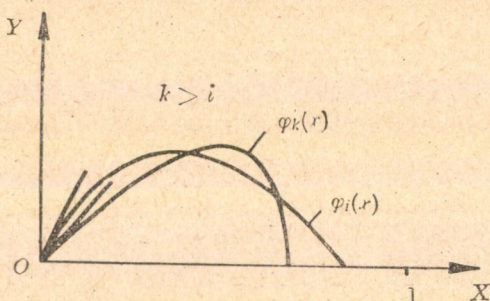


Fig. 1

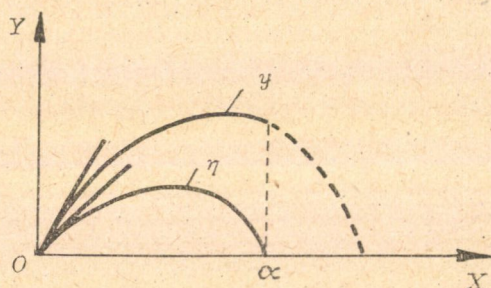


Fig. 2

Wir zeigen die Unmöglichkeit dieser Anordnung.

Betrachten wir die Lösungen y und η der Gleichungen

$$(G) \quad y'' + Q(x) \frac{y^3}{y^2 + y'^2} = 0, \quad \eta'' + R(x) \frac{\eta^3}{\eta^2 + \eta'^2} = 0$$

mit

$$y(0) = \eta(0) = 0, \quad \text{aber} \quad y'(0) \geq \eta'(0) > 0$$

und sei

$$R(x) \geq Q(x) > 0, \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$R(x) - Q(x) \geq O(x) \quad (x \rightarrow +0)$$

aber in der ersten Ungleichung gelte das Zeichen $=$ für keine Teilintervalle, ferner bezeichnen wir die erste positive Nullstelle von η durch α . Dann behaupten

wir: der Bruch $y(x)/\eta(x)$ im $0 < x \leq \alpha$ wächst und so⁵⁾ $y(x) > \eta(x)$ im demselben Intervall.

Beweis. Aus unseren Gleichungen ist die Identität

$$(y'\eta - \eta'y)' = y\eta \frac{(R-Q)y^2\eta'^2 + Ry'^2\eta^2 - Q\eta'^2y^2}{(y^2 + y'^2)(\eta^2 + \eta'^2)}$$

bekannterweise ableitbar, deren Integralform

$$(12) \quad A(x) = y'\eta - \eta'y = \int_0^x y\eta \frac{(R-Q)y^2\eta'^2 + Ry'^2\eta^2 - Q\eta'^2y^2}{(y^2 + y'^2)(\eta^2 + \eta'^2)} dx$$

ist. Wir behaupten, dass für genug kleine $x > 0$

$$D(x) \equiv Ry'^2\eta^2 - Q\eta'^2y^2 > 0.$$

Nämlich, wegen

$$y(0) = \eta(0) = 0, \quad y'(0) \geq \eta'(0) > 0, \quad y''(0) = \eta''(0) = 0,$$

haben wir die Grössenanordnungen, wie folgt

$$\left. \begin{aligned} y &= cx + o(x^2), & y' &= c + o(x) & (c = y'(0)) \\ \eta &= \gamma x + o(x^2), & \eta' &= \gamma + o(x) & (\gamma = \eta'(0)) \end{aligned} \right\} x \rightarrow +0,$$

woraus

$$\left. \begin{aligned} y\eta' &= c\gamma x + o(x^2) \\ \eta'y &= c\gamma x + o(x^2) \end{aligned} \right\} \text{ bzw. } \left. \begin{aligned} y^2\eta'^2 &= c^2\gamma^2 x^2 + o(x^3) \\ \eta'^2y^2 &= c^2\gamma^2 x^2 + o(x^3) \end{aligned} \right\} x \rightarrow +0.$$

Daraus endlich

$$D(x) \equiv Ry'^2\eta^2 - Q\eta'^2y^2 = (R-Q)c^2\gamma^2 x^2 + o(x^3), \quad x \rightarrow +0$$

also $D(x) \equiv Ry'^2\eta^2 - Q\eta'^2y^2 > 0$ für genug klein $x > 0$. Es folgt danach — wegen der Positivität des Integrandes — aus (12), dass $A(x) \equiv y'\eta - \eta'y > 0$ für genug klein $x > 0$. Wir zeigen, dass $A(x) \geq 0$ im ganzen Intervall $0 < x \leq \alpha$, aber das Zeichen = in keinen Teilintervall gilt.

Nehmen wir an, dass $A(x) \geq 0$ nicht im ganzen Intervall $0 < x \leq \alpha$ gelte. Dann gibt es eine kleinste $0 < \beta < \alpha$ Zahl, für die

$$A(\beta) = y'(\beta)\eta(\beta) - \eta'(\beta)y(\beta) = 0 \quad \text{und} \quad A(\beta + \varepsilon) < 0$$

für genug kleine $\varepsilon > 0$, was nur im Falle möglich sein kann, wo der Ausdruck $D(x)$ des Integrandes von (12) schon von einer vorigen Stelle $x = \delta$ negativ ist (δ sei die kleinste dieser Stellen). Dann

$$R(\delta)y'(\delta)^2\eta(\delta)^2 = Q(\delta)\eta'(\delta)^2y(\delta)^2 \quad (0 < \delta < \beta),$$

woraus

$$y'(\delta)^2\eta(\delta)^2 \leq \eta'(\delta)^2y(\delta)^2,$$

d.h.

$$|y'(\delta)|\eta(\delta) \leq |\eta'(\delta)|y(\delta).$$

⁵⁾ Nämlich $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{y(x)}{\eta(x)} = \frac{y'(0)}{\eta'(0)} \geq 1$.

Da bei kleinen x — wo $y' > 0$, $\eta' > 0$ — das umgekehrte gilt, muss eine kleinste Stelle ε ($0 < \varepsilon \leq \delta < \beta$) existieren, wo

$$|y'(\varepsilon)|\eta(\varepsilon) = |\eta'(\varepsilon)|y(\varepsilon),$$

d. h., wo die Funktionen

$$z(x) = \frac{y'(x)}{y(x)}, \quad \zeta(x) = \frac{\eta'(x)}{\eta(x)}$$

in ihren Beträgen gleich sind. (Bei kleinen $x > 0$ $z > \zeta > 0$.) Das kann nicht eintreten, wo $y' > 0$, $\eta' > 0$, da dann $A(\varepsilon) = 0$ ist, aber $\varepsilon < \beta$, was der Definition der Stelle β widerspricht. Das tritt auch dann nicht ein wenn

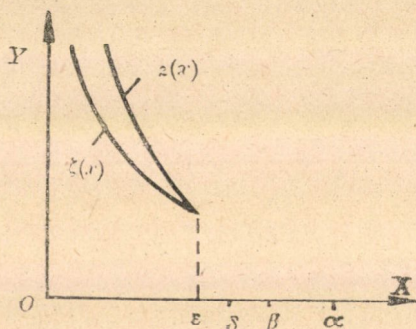


Fig. 3

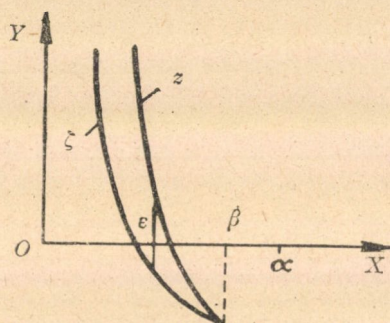


Fig. 4

$y'(\varepsilon) = \eta'(\varepsilon) = 0$, denn auch in diesem Falle verschwindete $A(x)$ bei ε vor der Stelle β . Es ist möglich aber, dass $z(\varepsilon) = -\zeta(\varepsilon)$ sei. Nach dieser Stelle ε kann der Integrand negativ werden so, dass an der Stelle $x = \beta$

$$z(\beta) = \zeta(\beta) < 0 \quad (y'(\beta) < 0, \eta'(\beta) < 0)$$

und wird $A(\beta) = 0$ sein, folglich nimmt das Integral in (12) den Wert 0 an. Ist im Intervall $\beta < x < \alpha$ $z < \zeta < 0$, dann wird der Integrand von (12) — wegen des Gliedes $(Rz^2 - Q\zeta^2)y^2\eta^2$ — zu positiv ($|z| > |\zeta|$), d. h. für diese x

$$A(x) > 0, \quad z(x) > \zeta(x),$$

was einen Widerspruch bildet. Ist $z(x) > \zeta(x)$ im demselben Intervall, dann $A(x) = (z - \zeta)y\eta > 0$. Ist in diesem Intervall oder in einem Teilintervall dessen $z(x) = \zeta(x)$, dann wird der Integrand von (12) zu positiv, bzw. in keinem Teilintervall identisch verschwindend — wegen auf R und Q gesetzten Annahmen — und so der Wert des Integrals $A(x)$ positiv ist.

Also auf jede Weise $A(x) \geq 0$ ($0 < x \leq \alpha$), wodurch unsere Behauptung bewiesen wurde. Es ist auch klar, dass $\eta(x)$ kann ihres Maximum bei grösseren x als $y(x)$ nicht aufnehmen, denn das zu $A(x) < 0$ ($\eta' = 0$, $y' < 0$) führte, was unmöglich ist, aber auch nicht bei zusammenfallenden Abscissen x , denn $A(x) = 0$ träte ein, obwohl der Integrand von (12) bis dieser Stelle positiv ist. Daher die Maximumstelle von $y(x)$ ist jenseits dieser von $\eta(x)$.

Nehmen wir jetzt eine willkürliche oszillierende Lösung der Gleichung

$$(13) \quad y'' + Q(x, \lambda) \frac{y^3}{y^2 + y'^2} = 0,$$

etwa irgendeine Eigenfunktion $y(x)$ einer gegebenen Randwertaufgabe.

Sei $Q(x, \lambda)$ — bei festgesetzten λ — zunehmende Funktion von x und an jeden Stellen x sei mindestens eine von $D_+Q(x)$, $D_-Q(x)$ positiv.

Behauptet wird, dass jede Halbwelle von $y(x)$ durch eine Drehung, mit 180° um dem gemeinsamen Nullpunkt ganz über (unter) die nächstfolgende Halbwelle gedreht werden kann. Mit derselben Drehung gelangt die die Nullstelle vorhergehende „Viertelwelle“⁶⁾ ganz über die nächstfolgende (der Punkt M' fällt jenseits N). Daraus folgt natürlich die Abnahme der Amplituden und und der Flächeninhalte der Halbwellen in der Richtung wachsender x . Es folgt ferner, dass die linkseitige der erwähnten Viertelwellen immer die grössere Inhalt hat und die Weite von einer Extremenstelle bis der nächsten Nullstelle grösser ist, als von da bis dem nächsten Extremum. Schliesslich nimmt die Weite der Nullstellen auch ab.

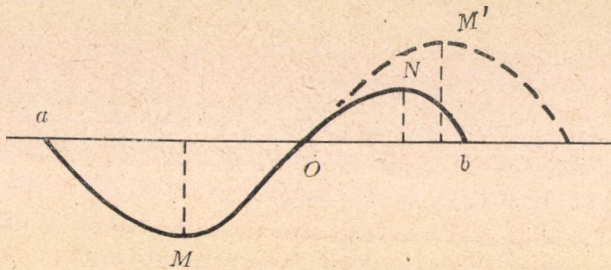


Fig. 5.

Beweis. Sei die gemeinsame Nullstelle 0 (was mit einer Translation immer erreichbar ist) und die mit ihr benachbarten Nullstellen a, b ($a < 0 < b$). Die gedrehte Halbwelle $a \leq x \leq 0$ mit der Gleichung $\eta(x) = -y(-x)$ genügt der Gleichung

$$(14) \quad \eta'' + Q(-x, \lambda) \frac{\eta^3}{\eta^2 + \eta^2} = 0 \quad \text{und} \quad \eta'(0) = y'(0) \neq 0,$$

wie man leicht einsieht. Aber $Q(-x, \lambda) < Q(x, \lambda)$ $x > a$ und $Q(x, \lambda) - Q(-x, \lambda) \geq O(x)$ ($x \rightarrow +0$), folglich kann der obige Satz auf die Lösungen y, η der Gleichungen (13) und (14) angewendet werden, was unsere Behauptung klar macht.

Seien die Gleichungen unter (G) noch ein letztes Mal betrachtet. Genügen ihre Lösungen — y und η — die Anfangsbedingungen

$$y(0) = \eta(0) > 0, \quad y'(0) = \eta'(0) = 0,$$

dann wird behauptet: Der Bruch y/η nimmt in $0 < x \leq \alpha$ zu. Folglich $y > \eta$ in demselben Intervall. — α edeutet hier die kleinste positive Nullstelle von η .

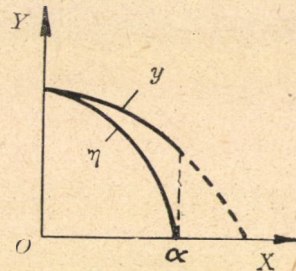


Fig. 6

⁶⁾ Unter einer „Viertelwelle“ wird der zwischen einer Nullstelle und der folgenden bzw. vorigen Extremenstelle liegende Teil der Kurve verstanden. — Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstelle von y gibt es nur eine Nullstelle von y' , denn die Halbwellen sind abwechselnd konvex bzw. konkav.

Beweis. Die Behauptung ist für kleine $x > 0$ klar. Schreiben wir nämlich (12) in die form

$$(12') \quad z - \zeta = \frac{1}{y\eta} \int_0^x y\eta \frac{R - Q + Rz^2 - Q\zeta^2}{(1+z^2)(1+\zeta^2)} dx, \quad \left(z = \frac{y'}{y}, \zeta = \frac{\eta'}{\eta} \right)$$

dann erhellt es, dass der Glied $Rz^2 - Q\zeta^2$ für genug kleine $x > 0$ zu $R - Q$



Fig. 7

sehr klein ist (s. die auf Q und R gemachte Voraussetzungen) und so das Integral in (12') positiv ist, d.h.

$$\left(\frac{y}{\eta} \right)' = \frac{A(x)}{\eta^2} = (z - \zeta) \frac{\eta}{y} > 0 \quad \text{für genug kleine } x > 0.$$

Wir haben aber für diese x

$$y' < 0, \eta' < 0, \text{ folglich } z < 0, \zeta < 0.$$

Danach bedeutet die Ungleichung $z - \zeta > 0$, dass $|z| < |\zeta|$ ist. Nehmen wir an, dass $z - \zeta$ in $0 < x \leq \alpha$ irgendwo negativ wird. Dann gibt es eine erste solche Stelle δ ($0 < \delta < \alpha$), wo $z - \zeta = 0$ ist und darum muss auch eine erste Stelle β ($0 < \beta < \delta < \alpha$) existieren, wo $Rz^2 - Q\zeta^2 = 0$ ist. Hier gilt $|z(\beta)| \leq |\zeta(\beta)|$ und muss $|z| < |\zeta|$ (d.h. $z - \zeta > 0$) in dem Intervall $\beta < x < \delta$ gelten, dass der Wert

$$\frac{1}{y\eta} \int_0^\delta \dots = z(\delta) - \zeta(\delta)$$

verschwinden könne. Ist $|z| \leq |\zeta|$ für $x > \delta$, dann $z - \zeta \geq 0$ ist. Ist dagegen $|z| > |\zeta|$, dann haben wir

$$y\eta(z - \zeta) = \int_0^x \dots = \int_0^\delta \dots + \int_\delta^x \dots = \int_\delta^x \dots > 0 \quad (x > \delta),$$

was einen Widerspruch bedeutet, also auf jede Weise $z - \zeta > 0$, wie die Behauptung war.



Fig. 8

Auf dessen Grund können wir leicht einsehen, dass die die Extremenpunkte vorhergehende „Viertelwelle“ einer oscillierenden Lösung der Gleichung

$$y'' + Q(x, \lambda) \frac{y^3}{y^2 + y'^2} = 0$$

durch eine Spiegelung an der Ordinate des Extremenpunktes ganz über (unter) die nächstfolgende Viertelwelle gebracht werden kann. Der Beweis geschieht ebenso, wie im Falle der Halbwellen. So ergibt sich als *Endresultat*: Die Flächeninhalte (T_i) und die „Länge“ (d_i) der Viertelwellen bilden abnehmende Folgen. (Unter der „Länge“ der Viertelwellen verstehen wir den Abstand einer Nullstelle von der nächsten Extremenstelle, oder von da bis der nächsten Nullstelle.) D.h.

$$T_1 > T_2 > T_3 > \dots$$

$$d_1 > d_2 > d_3 > \dots$$

5. §. Stabilitätsverhältnisse

Die Stabilitätsverhältnisse des Systems

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= P(x)y + Q(x)z + A(x) \frac{y^3}{y^2 + z^2} + B(x) \frac{z^3}{y^2 + z^2} \\ \frac{dz}{dx} &= R(x)y + S(x)z + C(x) \frac{y^3}{y^2 + z^2} + D(x) \frac{z^3}{y^2 + z^2} \end{aligned}$$

können nach bekannten Mustern behandelt werden. — Das System (15) nimmt mit der Matrix-Vektor Schreibweise die Form

$$(15') \quad \frac{du}{dx} = \mathbf{M}(x)u + \mathbf{N}(x)f(u) \quad (u(0) = c)$$

auf, wo u , $f(u)$ und c Vektoren⁷⁾, \mathbf{M} und \mathbf{N} Matrizen bezeichnen:

$$u(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ z(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}(x) = \begin{pmatrix} P(x) & Q(x) \\ R(x) & S(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}(x) = \begin{pmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{pmatrix},$$

$$f(u) = \begin{pmatrix} \frac{y^3}{y^2 + z^2} \\ \frac{z^3}{y^2 + z^2} \end{pmatrix}.$$

Denken wir uns $u \equiv o$ als Lösung des Systems (15') (wenn das mit $y^2 + z^2$ multipliziert wird) und seien die Koeffizienten $\mathbf{M}(x)$, $\mathbf{N}(x)$ z.B. für $x \geq 0$ definiert und stetig. Nehmen wir auch die Gleichungen

$$(16) \quad \frac{dv}{dx} = \mathbf{M}(x)v \quad v(0) = c$$

$$(17) \quad \frac{dV}{dx} = \mathbf{M}(x)V \quad V(0) = \mathbf{I} \quad (\mathbf{I} = \text{Identitätsmatrix})$$

⁷⁾ c ist ein konstanter Vektor und o bedeutet den Nullvektor.

mit ihren zu den gezeichneten Anfangswerten gehörigen Lösungen, dann $v = Vc$ und

$$(18) \quad u = v + \int_0^x V(x) V^{-1}(t) N(t) f(u(t)) dt.$$

Ist z.B., $M = \text{const.}$, dann

$$(19) \quad u = v + \int_0^x V(x-t) N(t) f(u(t)) dt.$$

Nur den folgenden einfachen Satz fassen wir ab: Ist $M = \text{const.}$ und sind alle Lösungen von (16) beschränkt, dann — angenommen

$$\int_0^{\infty} \|N(x)\| dx < \infty$$

— gilt dasselbe für alle Lösungen von (15'); wenn $\|N(x)\| \leq c_1$ und für alle Lösungen v von (16) $v \rightarrow o$ mit $x \rightarrow +\infty$, dann auch $u \rightarrow o$ für alle Lösungen von (15'). c_1 bedeutet hier eine nur von der Matrix M abhängige Konstante. Natürlich die Lösung $u = 0$ ist jetzt stabil. $\|N\|$ bezeichnet das Norm der Matrix N , d.h. die Summe der Beträge ihrer Elemente und $\|u\| = |y| + |z|$. Wir bemerken, dass

$$\|f(u)\| = \frac{|y|^3}{y^2 + z^2} + \frac{|z|^3}{y^2 + z^2} \leq \frac{|y|^3}{y^2} + \frac{|z|^3}{z^2} = |y| + |z| = \|u\|.$$

S. die weitere Behandlung z.B. in der 2-ten Abschnitt von [4].

(Eingegangen: 10. XII. 1957.)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] PRÜFFER, H.: „Neue Herleitung der Sturm-Liouvilleschen Reihenentwicklung stetiger Funktionen.“ *Mathematische Annalen* **95** (1926) 499–518.
- [2] KAMKE, E.: *Differentialgleichungen reeller Funktionen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Berlin, 1930.
- [3] KAMKE, E.: „Über Sturms Vergleichssätze für homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung und Systeme von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung.“ *Mathematische Zeitschrift* **47** (1942) 788–795.
- [4] BELLMANN, R.: *Stability theory of differential equations*. McGraw—Hill, New York, 1953.

STURM OSZCILLÁCIÓS ÉS ÖSSZEHASONLÍTÁSI TÉTELEINEK KITERJESZTÉSE BIZONYOS MÁSODRENDŰ NEM-LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK MEGOLDÁSAIRA

BIHARI IMRE

Kivonat

A dolgozat az (1) egyenletre és elsőrendű homogén lineáris rendszerre ismeretes oszcilláció és összehasonlítási tételek (lásd: [1], [2] és [3]) kiterjesztését tárgyalja a (4'') egyenletre és a (9), (10) rendszerre. Példát is tartalmaz sajátérték és sajátfüggvény meghatározására. A továbbiakban nagyságrendi összehasonlítási tételek következnek, melyek az oszcilláló megoldások fél- és negyedhullámainak az összehasonlítását végzik. Végeredményképpen azt kapjuk, hogy ezek az egymás után következő „negyedhullámok“ területre és hosszúságra nézve csökkennek (lásd a 8. ábrát), sőt minden félhullám a zérushely körüli 180° -os elforgatással teljesen a következő fölé (alá) vihető és ugyanez érvényes minden negyedhullámpárra, melyek egy zérushely bal-, illetve jobboldalán helyezkednek el. Egy félhullám balfelét alkotó negyedhullám az extrémumpont ordinátájára való tükrözéssel mindig a jobboldali negyedhullám fölé vihető. — Az utolsó rész a (15) egyenletek stabilitási viszonyait tárgyalja és a lineáris egyenletekre ismertekhez hasonló eredményeket állapít meg.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ И СРАВНИТЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ ТИПА STURM-A НА РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

I. BIHARI

Резюме

Работа распространяет осцилляционные и сравнительные теоремы, известные для уравнения (1) и однородной линейной системы первого порядка (см. [1], [2] и [3]) на уравнение (4'') и систему (9), (10). Она содержит и пример определения собственного значения и собственной функции. В дальнейшем следуют теоремы о сравнении порядка, которые сравнивают полу- и четвертьволны осциллирующим решением. Согласно окончательному результату, площади и длина этих следующих друг за другом „четвертьволн“ убывают (см. последний рисунок), более того: каждая полуволна вращением на 180° вокруг корня может быть целиком помещена над (под) предыдущей и это же имеет место для каждой пары четвертьволн, которые расположены с двух сторон корня. Четверть волны, являющаяся левой половиной полуволны, отображением относительно ординаты экстремальной точки всегда может быть помещена над правой четвертьволной. Последняя часть изучает отношения стабильности уравнений (15) и получает результаты, аналогичные известным для линейных уравнений.



REMARKS ON RANDOM WALK PROBLEMS

LAJOS TAKÁCS

Introduction

Let $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ be mutually independent random variables which take on the values $+1$ and -1 with probability $1/2$. Put $\eta_0 = 0$ and $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ ($n = 1, 2, \dots$). The sequence of random variables $\{\eta_n\}$ describes the motion of a free particle on a straight line. The particle starts at $x=0$ and in each step it can move either a unit distance to the right or a unit distance to the left with probability $1/2$. The displacements are independent of each other. We say that the sequence $\{\eta_n\}$ describes an *ordinary random walk*.

Next by the aid of the above random variables ξ_n ($n = 1, 2, \dots$) let us define the sequence of random variables $\{\eta_n^*\}$ as follows: $\eta_0^* = 0$ and for $n = 1, 2, \dots$

$$\eta_n^* = \begin{cases} \eta_{n-1}^* + \xi_n & \text{if } \eta_{n-1}^* \neq a \text{ or } -b \\ \eta_{n-1}^* & \text{if } \eta_{n-1}^* = a \text{ or } -b \end{cases}$$

where a and b are fixed positive integers. As it can be easily seen the sequence of random variables $\{\eta_n^*\}$ describes a *random walk with two absorbing barriers*. The particle starts at $x=0$ and moves as above but if the particle reaches one of the points $x=a$ and $x=-b$ (absorbing barriers) its motion terminates.

In what follows we shall prove some limiting theorems concerning the above random walk problems. These theorems play an important rôle in the theory of order statistics. Though these results are not new the following proofs are very simple and the theorems are expressed in a new form.

§ 1. The ordinary random walk problem

Define $\delta_n^+ = \max(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$, $\delta_n^- = -\min(\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$ and $\delta_n = \delta_n^+ + \delta_n^-$. We shall prove the following results.

Theorem 1. *If $z > 0$ and $y > 0$ then we have*

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\delta_n^+ < n^{1/2} z, \delta_n^- < n^{1/2} y\} = F(z, y)$$

where

$$(2) \quad F(z, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [\Phi(k(z+y) + z) - \Phi(k(z+y) - y)]$$

or

$$(3) \quad F(z, y) = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{2(z+y)^2}} \sin \frac{(2j+1) \pi z}{2(z+y)}.$$

Here as usually

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

This theorem was proved by A. A. ANIS [1] in the form (3). The function (3) is well known as the solution of the heat conduction equation.

Theorem 2. If $z > 0$ and $y > 0$ then we have

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\delta_{2n}^+ < (2n)^{1/2} z, \delta_{2n}^- < (2n)^{1/2} y | \eta_{2n} = 0\} = K(z, y)$$

where

$$(5) \quad K(z, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (e^{-2(z+y)^2 k^2} - e^{-2((z+y)k+z)^2})$$

or

$$(6) \quad K(z, y) = \frac{\sqrt{2\pi}}{z+y} \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{j^2 \pi^2}{2(z+y)^2}} \sin^2 \frac{j \pi z}{z+y}.$$

This theorem in the form (5) was proved earlier by B. V. GNEDENKO [5].

Theorem 3. If $x > 0$ then we have

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\delta_n < n^{1/2} x\} = F^*(x)$$

where

$$(8) \quad F^*(x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) [\Phi((k+1)x) - \Phi(kx)]$$

or

$$(9) \quad F^*(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2}{2x^2}} \left[\frac{(2k+1) \pi^2}{x^3} + \frac{1}{(2k+1)^2 \pi} \right].$$

This theorem was proved earlier by W. FELLER [4] and A. A. ANIS [1]. They determined the density function $F^{**}(x)$, corresponding to the formulae (8) resp. (9).

Theorem 4. If $x > 0$ then we have

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\delta_{2n} < (2n)^{1/2} x | \eta_{2n} = 0\} = K^*(x)$$

where

$$(11) \quad K^*(x) = 1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (4k^2 x^2 - 1) e^{-2k^2 x^2}$$

or

$$(12) \quad K^*(x) = \frac{\pi^{3/2}}{2^{1/2} x^2} \sum_{j=1}^{\infty} j^2 e^{-\frac{j^2 \pi^2}{2x^2}}.$$

This theorem was proved earlier by B. V. GNEDENKO [5]. He showed that

$$\frac{dK^*(x)}{dx} = 8x \sum_{k=1}^{\infty} (4k^4 x^2 - 3k^2) e^{-2k^2 x^2}.$$

The proofs of these theorems are based on the following theorem concerning the random walk with absorbing barriers.

§ 2. Random walk with absorbing barriers

Theorem 5. *If $-b < x < a$, then we have*

$$(13) \quad \mathbf{P}\{\eta_n^* = x\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\mathbf{P}\{\eta_n = 2(a+b)k + x\} - \mathbf{P}\{\eta_n = 2(a+b)k + 2a - x\}]$$

or

$$(14) \quad \mathbf{P}\{\eta_n^* = x\} = \frac{2}{a+b} \sum_{k=0}^{a+b} \left(\cos \frac{k\pi}{a+b} \right)^n \sin \frac{k\pi a}{a+b} \sin \frac{k\pi(a-x)}{a+b}.$$

The formula (13) as usual can be proved by the method of images. The formula (14) can be obtained by the calculus of finite differences (cf. R. E. ELLIS [2], JORDAN K. [6]) or by the methods of Markov chains (cf. W. FELLER [3], A. A. ANIS [1]). In what follows we shall give a simple proof of this theorem.

Proof of (13). Denote by A the set of the numbers $\{2(a+b)k + x\}$ and B the set of the numbers $\{2(a+b)k + 2a - x\}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Define by A and B the events $\eta_n \in A$ and $\eta_n \in B$, respectively. Further denote by A_0 the simultaneous occurrence of the events $\eta_n = x$ and $-b < \eta_i < a$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Now we can write $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{AA_0\} + \mathbf{P}\{A\bar{A}_0\}$. Here first $A_0 \subset A$ and consequently $\mathbf{P}\{AA_0\} = \mathbf{P}\{A_0\}$. Secondly $\mathbf{P}\{A\bar{A}_0\} = \mathbf{P}\{B\}$. Namely the event $A\bar{A}_0$ denotes that the particle at the n -th step will be in the set A and during the first n steps reaches at least one of the points $x = a$ and $x = -b$. If the particle reaches first either of the points $x = a$ and $x = -b$ then let us change the direction of the further displacements of the particle into opposite. Thus we have a path leading by n steps into the set B instead of A . Conversely if we proceed similarly we can correspond to all pathes leading by n steps into the set B such a path which leads by n steps into the set A and which reaches at least one of the points $x = a$ and $x = -b$. This is one-to-one correspondence and the pathes have the same probabilities. Consequently $\mathbf{P}\{A\bar{A}_0\} = \mathbf{P}\{B\}$. So we have $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{A_0\} + \mathbf{P}\{B\}$. Since $\eta_n^* = x$ and A_0 are the same events, we obtain $\mathbf{P}\{\eta_n^* = x\} = \mathbf{P}\{A_0\} = \mathbf{P}\{A\} - \mathbf{P}\{B\}$ what was to be proved.

Proof of (14). It is well known that if $r < l$ then

$$(15) \quad \binom{n}{r} + \binom{n}{r+l} + \binom{n}{r+2l} + \dots = \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{l-1} \left(2 \cos \frac{k\pi}{l} \right)^n \cos \frac{k(n-2r)\pi}{l}$$

(cf. E. NETTO [7] p. 20). Since

$$\mathbf{P}\{\eta_n = x\} = \begin{cases} \left(\frac{n+x}{2} \right) \frac{1}{2^n} & \text{if } n+x \text{ is even} \\ 0 & \text{if } n+x \text{ is odd,} \end{cases}$$

we obtain by (15) that

$$\sum_k \mathbf{P}\{\eta_n = 2(a+b)k+x\} = \frac{1}{a+b} \sum_{k=0}^{a+b-1} \left(\cos \frac{k\pi}{a+b} \right)^n \cos \frac{k\pi x}{a+b}$$

if $n+x$ is even and similarly

$$\sum_k \mathbf{P}\{\eta_n = 2(a+b)k+2a-x\} = \frac{1}{a+b} \sum_{k=0}^{a+b-1} \left(\cos \frac{k\pi}{a+b} \right)^n \cos \frac{k\pi(2a-x)}{a+b}.$$

if $n+x$ is even. Consequently by (13) we have

$$\mathbf{P}\{\eta_n^* = x\} = \frac{1}{a+b} \sum_{k=0}^{a+b-1} \left(\cos \frac{k\pi}{a+b} \right)^n \left(\cos \frac{k\pi x}{a+b} - \cos \frac{k\pi(2a-x)}{a+b} \right),$$

if $n+x$ is even. But this formula is valid also for every x ($-b < x < a$). Namely if $n+x$ is odd then both side of this formula is zero. This can be easily seen. If we substitute $k = a+b-j$ then we obtain that $\mathbf{P}\{\eta_n^* = x\} = (-1)^{n+x} \mathbf{P}\{\eta_n^* = x\}$.

§ 3. Proof of Theorems 1.—4.

Proof of (1)—(2). Evidently

$$\mathbf{P}\{\delta_n^+ < a, \delta_n^- < b\} = \mathbf{P}\{-b < \eta_n^* < a\}.$$

By (13) we can write

$$\mathbf{P}\{-b < \eta_n^* < a\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \mathbf{P}\{k(a+b) - b < \eta_n < k(a+b) + a\}.$$

Now suppose that a and b depend on n , that is $a = a_n$ and $b = b_n$ where

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{1/2}} = z > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n^{1/2}} = y > 0.$$

By applying the central limit theorem, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{-b_n < \eta_n^* < a_n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k [\Phi(k(z+y)+z) - \Phi(k(z+y)-y)].$$

The limit may be formed term by term the sum being uniformly convergent. As the limiting distribution is continuous in z and y , we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{-n^{1/2}y < \eta_n^* < n^{1/2}z\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{-b_n < \eta_n^* < a_n\}$$

which proves (2).

Proof of (1)–(3). Now by (14) we have

$$\mathbf{P}\{-b < \eta_n^* < a\} = \frac{2}{a+b} \sum_{k=0}^{a+b} \left(\cos \frac{k\pi}{a+b} \right)^y \sin \frac{k\pi a}{a+b} \sum_{x=-b}^a \sin \frac{k\pi(a-x)}{a+b}.$$

Here

$$\sum_{x=-b}^a \sin \frac{k\pi(a-x)}{a+b} = \frac{1 - (-1)^k \cos \frac{k\pi}{a+b}}{2 \sin \frac{k\pi}{a+b}}.$$

If $a = a_n$ and $b = b_n$ correspond to (16) and $n \rightarrow \infty$ we obtain

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{-b_n < \eta_n^* < a_n\} = \frac{4}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} e^{-\frac{(2j+1)^2 \pi^2}{2(z+y)^2}} \sin \frac{(2j+1)\pi z}{z+y}.$$

Namely,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{k\pi}{a_n + b_n} \right)^n = e^{-\frac{k^2 \pi^2}{2(z+y)^2}}$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n + b_n} \sum_{x=-b_n}^{a_n} \sin \frac{k\pi(a_n - x)}{a_n + b_n} = \begin{cases} \frac{1}{(2j+1)\pi} & \text{if } k = 2j+1 \\ 0 & \text{if } k = 2j. \end{cases}$$

(3) follows similarly as above.

Proof of (4)–(5). Evidently

$$\mathbf{P}\{\delta_{2n}^+ < a, \delta_{2n}^- < b | \eta_{2n} = 0\} = \mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0 | \eta_{2n} = 0\}.$$

Now by (13) we have

$$\mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 2(a+b)k\} - \mathbf{P}\{\eta_{2n} = 2(a+b)k + 2a\}].$$

Putting $a = a_{2n}$ and $b = b_{2n}$, according to (16), we obtain

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0 | \eta_{2n} = 0\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0\}}{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 0\}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [e^{-2(z+y)^2/k^2} - e^{-2((z+y)k+z)^2}].$$

Namely by Moivre-Laplace theorem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 2(a_n + b_n)k\}}{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 0\}} = e^{-2(z+y)^2/k^2}$$

and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 2(a_n + b_n)k + 2a_n\}}{\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 0\}} = e^{-2((z+y)k+z)^2}$$

Further it is easy to see that the limit may be formed term by term. So we have proved (5).

Proof of (4)–(6). We proceed similarly as above. Now by (14) we have

$$\mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0\} = \frac{2}{a+b} \sum_{k=0}^{a+b} \left(\cos \frac{k\pi}{a+b} \right)^{2n} \sin^2 \frac{k\pi a}{a+b}.$$

Putting $a = a_{2n}$ and $b = b_{2n}$, we obtain

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\eta_{2n}^* = 0 | \eta_{2n} = 0\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{z+y} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\frac{k^2\pi^2}{2(z+y)^2}} \sin^2 \frac{k\pi z}{z+y}$$

as

$$\mathbf{P}\{\eta_{2n} = 0\} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \quad (n \rightarrow \infty)$$

This proves (6).

Proof of Theorem 3. It can be easily seen by the theorem of total probability that

$$F^*(x) = \int_0^x \left(\frac{\partial F(z, y)}{\partial z} \right)_{y=x-z} dz.$$

Carrying out the calculation with $F(z, y)$ defined by (2) or (3) we obtain (8) and (9) respectively.

Remark. By (8) we have

$$\frac{dF^*(x)}{dx} = \frac{8}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k^2 e^{-\frac{k^2 x^2}{2}} \quad (0 < x < \infty).$$

Denote by M_s ($s = 1, 2, \dots$) the s -th moment of $F^*(x)$. Then we have

$$M_s = \int_0^{\infty} x^s dF^*(x) = s \int_0^{\infty} x^{s-1} [1 - F^*(x)] dx$$

and specifically

$$M_1 = \sqrt{\frac{8}{\pi}}$$

and

$$M_s = \frac{2^{\frac{s+4}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{s-1}}$$

if $s = 2, 3, \dots$

Proof of Theorem 4. Similarly as above we have

$$K^*(x) = \int_0^x \left(\frac{\partial K(z, y)}{\partial z} \right)_{y=x-z} dz$$

what proves (11) and (12) if $K(z, y)$ is defined by (5) and (6) respectively.

Remark. The moments M'_s ($s = 1, 2, \dots$) of $K^*(x)$ can be expressed as follows

$$M'_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

and

$$M'_s = \frac{4(s-1) \Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)}{2^{s/2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

if $s = 2, 3, \dots$

(Received: 21. VIII. 1957.)

REFERENCES

- [1] ANIS, A. A.: „On the distribution of the range of partial sums of independent random variables“. *Proceedings of the Mathematical and Physical Society of Egypt* **1** (1954) 83–89.
- [2] ELLIS, R. E.: „On the solution of equations in finite differences“. *Cambridge Mathematical Journal* **4** (1844) 182.
- [3] FELLER, W.: *An introduction to probability theory and its applications*. Wiley, New-York, 1950.
- [4] FELLER, W.: „The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables“. *Annals of Mathematical Statistics* **22** (1951) 427–432.
- [5] Гнеденко, Б. В.: „Проверка неизменности распределения вероятностей в двух независимых выборках“. *Mathematische Nachrichten* **12** (1954) 29–66.
- [6] JORDAN K.: *Fejezetek a klasszikus valószínűség-számításból*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956.
- [7] NETTO, E.: *Lehrbuch der Combinatorik*. Teubner, Leipzig, 1901.
- [8] TAKÁCS L.: „Bolyongási feladatokról“. *A Magyar Tudományos Akadémia Matematikai Kutató Intézetének Közleményei* **2** (1957) 81–90.

NÉHÁNY MEGJEGYZÉS BOLYONGÁSI FELADATOKKAL KAPCSOLATBAN

TAKÁCS LAJOS

Kivonat

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ kölcsönösen független valószínűségi változók, amelyekre $\mathbf{P}\{\xi_n = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_n = -1\} = \frac{1}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Továbbá legyen $\eta_0 = 0$ és $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). A dolgozat a $\delta_n^+ =$

$= \max (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$ és a $\delta_n^- = - \min (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$ változók együttes eloszlásának és a $\delta_n = \delta_n^+ + \delta_n^-$ változó eloszlásának aszimptotikus viselkedésével foglalkozik.

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ В СВЯЗИ С ЗАДАЧАМИ БЛУЖДЕНИЯ

L. TAKÁCS

Резюме

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ взаимно независимые случайные величины, для которых $\mathbf{P}\{\xi_n = 1\} = \mathbf{P}\{\xi_n = -1\} = \frac{1}{2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Пусть $\eta_0 = 0$ и $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Работа изучает асимптотическое поведение совместного распределения величин $\delta_n^+ = \max (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$ и $\delta_n^- = - \min (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n)$ и распределения $\delta_n = \delta_n^+ + \delta_n^-$.

EINIGE ZWEIDIMENSIONALE VERTEILUNGS- UND GRENZVERTEILUNGSSÄTZE IN DER THEORIE DER GEORDNETEN STICHPROBEN

ISTVÁN VINCZE

Einleitung

Im Folgenden beweisen wir einige Verteilungs- und Grenzverteilungssätze, die sich auf zwei Funktionen der Elemente zweier Stichproben beziehen. Diese zweidimensionale Verteilungssätze bieten die Möglichkeit, neue Kriterien zur Entscheidung der Frage, ob zwei Stichproben aus derselben Verteilung stammen oder nicht, zu konstruieren. Solche Kriterien kann man als Verfeinerung gewisser, nur auf einer Stichprobenfunktion beruhender Tests auffassen, und zwar im folgenden Sinne: Es seien D und E zwei verschiedene Stichprobenfunktionen der Elemente zweier Stichproben, die aus zwei zufälligen Variablen ξ bzw. η mit den Verteilungsfunktionen $F(x)$, bzw. $G(x)$ stammen. Wenn eine statistische Probe nur auf der Stichprobenfunktion D beruht, so bekommen wir als beste kritische Region für eine gewisse Alternativhypothese gegen die Nullhypothese $F(x) \equiv G(x)$ „im eindimensionalen D -Raum“ eine Punktmenge, welche wir Einfachheit halber als ein Intervall $D_1 < D < D_2$ annehmen können. Diese Region ist in der (D, E) -Ebene ein Streifen $D_1 < D < D_2, -\infty < E < \infty$. Wenn wir nun eine Probe mit Hilfe der zweidimensionalen Verteilung $H(x, y) = \mathbf{P}\{D < x, E < y\}$ konstruieren, so können wir kaum erwarten — wenigstens nicht aus heuristischen Gründen —, dass wir zu unserer Gegenhypothese denselben Streifen als beste kritische Region erhalten, wenn nur das Stichprobenfunktionspaar (D, E) in gewissem Sinne mehr aussagt, als D allein. — Auf die Fragen der auf unsere Verteilungssätze beruhenden statistischen Proben wollen wir in einer weiteren Mitteilung zurückkehren; wir möchten die zur Anwendung gewisser solcher Proben nötigen Tabellen auch bei dieser Gelegenheit angeben.

Unsere Sätze schliessen sich eng den bekannten Kriterien von KOLMOGOROW, SMIRNOW und RÉNYI an. Eben deshalb leiten wir unsere Resultate mit der Analyse dieser Kriterien ein.

Weiterhin wünschen wir uns auch in der späteren Arbeit mit einigen hier nicht behandelten Fragen des Zusammenhanges unserer Verteilungssätze mit den bekannten Verteilungssätzen zu befassen.

1. §. Die Tests von Kolmogorow, Smirnow und Rényi

Es seien $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ die Ergebnisse unabhängiger Messungen bezüglich einer zufälligen Variablen ξ mit der stetigen Verteilungsfunktion $F(x)$; d. h. unabhängige zufällige Variablen von der gleichen Verteilung. Es seien weiterhin $\xi_1^* < \xi_2^* < \dots < \xi_n^*$ die Elemente dieser Stichprobe, der Grösse nach geordnet. Es bezeichne $F_n(x)$ die Verteilungsfunktion der Stichprobe, d. h.

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x \leq \xi_1^*, \\ \frac{k}{n}, & \text{wenn } \xi_k^* < x \leq \xi_{k+1}^*, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1, & \text{wenn } \xi_n^* < x. \end{cases}$$

N. V. SMIRNOW [14] bestimmte die Grenzverteilung von

$$\sqrt{n} \sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - F(x)),$$

wenn $n \rightarrow \infty$, A. N. KOLMOGOROW [8] die Grenzverteilung von

$$\sqrt{n} \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)|.$$

Beide Grenzverteilungen sind unabhängig von der Verteilungsfunktion $F(x)$ und in Kenntnis dieser kann man bei gegebener, genügend grosser Stichprobe erwägen, ob die maximale Abweichung der empirischen Verteilungsfunktion von der theoretischen Verteilung, bzw. der Maximalwert der absoluten Abweichung noch erlaubt ist, nicht im Gegensatz zur Hypothese, dass die Stichprobenelemente $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ von der gleichen Verteilung mit der theoretischen Verteilungsfunktion $F(x)$ sind, steht.

Es seien nun $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ unabhängige Stichprobenelemente der zufälligen Variablen η mit der stetigen Verteilungsfunktion $G(x)$, und es sei $G_n(x)$ die empirische Verteilungsfunktion der Stichprobe. SMIRNOW hat die Grenzverteilung von

$$\sqrt{\frac{n}{2}} \sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - G_n(x)) \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{n}{2}} \sup_{-\infty < x < \infty} |F(x) - G(x)|$$

unter der Hypothese $F(x) \equiv G(x)$ bestimmt.¹⁾

Die Kenntnis dieser, von der Verteilungsfunktion $F(x)$ unabhängigen Grenzverteilungen ermöglicht die statistische Kontrolle der Hypothese $F(x) \equiv G(x)$ auf Grund von zwei Stichproben.

A. RÉNYI [11], [12] hat darauf hingewiesen, dass man obige Abweichungen bei kleinen Werten der Verteilungsfunktion $F(x)$ anders erwägen muss, als bei grösseren Funktionswerten. Deshalb hat er die Untersuchung der *relativen Abweichung* vorgeschlagen und in seiner Arbeit — unter anderem —

¹⁾ SMIRNOW hat sich nicht auf den Fall von gleich grossen Stichproben beschränkt.

folgende Grenzwertsätze bewiesen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{n} \sup_{x_a < x < \infty} \left(\frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)} \right) < y \right\} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{1-a} du, & \text{wenn } y > 0, \\ 0 & \text{wenn } y \leq 0. \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{n} \sup_{x_a < x < \infty} \left| \frac{F_n(x) - F(x)}{F(x)} \right| < y \right\} = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 (1-a)}{8y^2 a}}}{2k+1}, & \text{wenn } y > 0, \\ 0 & \text{wenn } y \leq 0. \end{cases}$$

Hierbei ist a eine beliebig kleine, positive durch $F(x_a) = a$ definierte Zahl. T. ANDERSON und D. DARLING [1] geben eine Methode zur Bestimmung der Grenzverteilung des Ausdruckes

$$\frac{F_n(x) - F(x)}{\sqrt{F(x)(1-F(x))}};$$

der auf diesem beruhende Test würde beide Enden der empirischen Verteilungsfunktion in gleichem Masse in Betracht ziehen. WANG SHOU-YEN [15] hat einen auf zwei Stichproben beruhenden Test entworfen, der — dem Gedanken von A. RÉNYI folgend — auf der relativen Abweichung beruht. In seiner Arbeit beschäftigt er sich jedoch nicht mit der Untersuchung des absoluten Wertes der relativen Abweichung.

Die RÉNYIschen Grenzwahrscheinlichkeiten verschwinden bei $a = 0$, d.h. die relative Abweichung kann in diesem Falle mit der Wahrscheinlichkeit 1 sehr gross sein. Also lässt der RÉNYISCHE Test notwendigerweise den Anfang der empirischen Verteilung ausser acht. Es ist also nötig, den Anfangspunkt der Beobachtung in Erwägung der Natur des konkreten Problems und der eventuellen Alternativhypothese zu bestimmen.

Ähnliche Schwierigkeiten treten dem Wesen nach bei jedem statistischen Test auf. Eine Möglichkeit der Überbrückung dieser Schwierigkeiten kann in der Konstruktion solcher Tests bestehen, die auf der Untersuchung der gemeinsamen Verteilung zweier oder mehrerer Statistiken beruhen. Im folgenden betrachten wir einerseits die maximale Abweichung bzw. absolute Abweichung der beiden empirischen Verteilungsfunktionen, andererseits die Stelle, wo dieser Wert zum ersten male angenommen wird. Die Tests erlauben am Anfang der Verteilung auch grössere relative Abweichungen, dort nämlich, wo solche mit grossen Wahrscheinlichkeiten auftreten; im weiteren Verlauf ist jedoch die Grösse der zulässigen relativen Abweichung beschränkt.

Wir haben auch die Verteilung des Quotienten der beiden untersuchten zufälligen Variablen bestimmt; dies ermöglicht eine Probe von ähnlichem Typ wie der RÉNYISCHE Test, jedoch ohne der Notwendigkeit der Verkürzung.

Als Randverteilungen unserer Verteilungen erhält man im Falle der Grenzverteilungen die KOLMOGOROW—SMIRNOWSchen Verteilungen für zwei Stichproben, im Falle endlicher Stichprobengrössen die durch B. V. GNEDENKO und V. S. KOROLJUK [7] gegebenen genauen Verteilungen, für gleich grosse Stichproben.

Es sei noch erwähnt, dass Z. W. BIRNBAUM und R. PYKE [2] bezüglich zweidimensionaler Verteilungen und Grenzverteilungen verwandte Ergebnisse erhalten haben (wovon ich durch 1. briefliche Mitteilung des ersten Verfassers Kenntnis erhalten habe).

2. §. Verteilungs- und Grenzverteilungssätze

Es sein wieder $F_n(x)$ und $G_n(x)$ die empirischen Verteilungsfunktionen von Stichproben mit der Grösse n der zufälligen Variablen ξ , bzw. η , mit den Verteilungsfunktionen $F(x)$, bzw. $G(x)$. Wir untersuchen den Verlauf der Funktion $F_n(x) - G_n(x)$ und bezeichnen im weiteren mit $\xi_0^{(n)}$ diejenige Stelle, an welcher die Differenz der beiden von links stetigen Treppenfunktionen zum erstenmal den Maximum annimmt; also ist $\xi_0^{(n)}$ die genaue untere Grenze der Maximumstellen. Eine Ausnahme bildet der Fall, wenn der Maximum 0 beträgt. In diesem Falle wäre — dem Vorausgesagten entsprechend — $\xi_0^{(n)} = -\infty$, bzw. die untere Grenze der Werte der zufälligen Variablen. In solchem Falle lassen wir das erste Intervall, in welchem $F_n(x) - G_n(x) = 0$ ausser Betracht und beachten zur Bestimmung von $\xi_0^{(n)}$ nur diejenige x -Stellen, die grösser sind, als eine Stelle x_0 , wobei $F_n(x_0) - G_n(x_0) < 0$.

Es sei weiterhin $\eta_0^{(n)}$ die genaue untere Grenze der Maximumstellen von $|F_n(x) - G_n(x)|$.

Mit diesen Bezeichnungen können folgende Sätze formuliert werden:

Satz 1. Ist $F(x) \equiv G(x)$, so ist

$$\mathbf{P} \left\{ \begin{aligned} &\sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - G_n(x)) = \frac{k}{n}, \frac{1}{2} (F_n(\xi_0^{(n)} + 0) + G_n(\xi_0^{(n)} + 0)) = \frac{r}{2n} \left\{ \begin{aligned} &0, \text{ wenn } k < 0 \text{ oder } k + r \text{ ungerade,} \\ &\frac{1}{(r-1)(2n-r+2)} \frac{\binom{r}{\frac{r}{2}} \binom{2n-r}{n-\frac{r}{2}}}{\binom{2n}{n}}, \text{ wenn } k=0, r=2, 4, \dots \\ &\frac{k(k+1)}{r(2n-r+1)} \frac{\binom{r}{\frac{r+k}{2}} \binom{2n-r+1}{n-\frac{r+k}{2}}}{\binom{2n}{n}}, \text{ wenn } k=1, 2, \dots, n; r=k, \\ &\quad k+2, \dots, 2n-k. \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

Führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$A_r^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{r}{2k} \right]} (-1)^\nu \binom{r}{\frac{r+k}{2} + \nu \cdot k} \frac{(2\nu+1)k}{r},$$

$$B_r^{(k)} = \frac{2^r}{k} \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \left(\cos(2\nu-1) \frac{\pi}{2k} \right)^r \sin(2\nu-1) \frac{\pi}{2k}.$$

Satz 2. Ist $F(x) \equiv G(x)$, k und $r > 0$, ganze Zahlen, so ist

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - G_n(x)| = \frac{k}{n}, \frac{1}{2} (F_n(\eta_0^{(n)} + 0) + G_n(\eta_0^{(n)} + 0)) = \frac{r}{2n} \right\} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{wenn } k < 0 \text{ oder } r+k \text{ ungerade,} \\ \frac{2A_r^{(k)} A_{2n-r+1}^{(k+1)}}{\binom{2n}{n}} = \frac{B_r^{(k)} B_{2n-r+1}^{(k+1)}}{2 \binom{2n}{n}}, & \text{wenn } k=1, 2, \dots, n; r=k, k+2, \dots, 2n-k \end{cases}$$

Hierbei kommt $k=0$ nicht in Frage.

In Betracht dessen, dass die Randverteilungen dieser Verteilungen durch GNEDENKO und KOROLJUK angegebene Verteilungen sind, erhalten wir die wahrscheinlichkeitstheoretischen Beweise folgender Identitäten:

$$\sum_{(r)}^* \frac{k(k+1)}{r(2n-r+1)} \binom{r}{\frac{r+k}{2}} \binom{2n-r+1}{n-\frac{r+k}{2}} = \frac{2k+1}{n+k+1} \binom{2n}{n-k},$$

wobei die Summierung auf $r=k, k+2, \dots, 2n-k$ erfolgt, während $1 \leq k \leq n$.
Für $k=0$ ist

$$\sum_{(r)}^* \frac{1}{(r-1)(2n-r+2)} \binom{r}{\frac{r}{2}} \binom{2n-r}{n-\frac{r}{2}} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

wobei die Summierung auf $r=2, 4, 6, \dots$ erfolgt. Eine ähnliche, jedoch kompliziertere Identität kann der absoluten Abweichung entsprechend aufgeschrieben werden.

Von obigen, sich auf endliche Stichproben beziehenden Sätzen erhalten wir die Grenzverteilungssätze, indem im Falle $n \rightarrow \infty$ r in n -ter Ordnung und k in \sqrt{n} -ter Ordnung nach Unendlich hält; genauer

$$k \sim \sqrt{2n} y, \quad r \sim 2nz.$$

Satz 3. Ist $F(x) \equiv G(x)$, so ist für $0 \leq z \leq 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{n}{2}} \sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - G_n(x)) < y, \frac{1}{2} (F_n(\xi_0^{(n)} + 0) + G_n(\xi_0^{(n)} + 0)) < z \right\} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \int_0^z \frac{u^2}{(v(1-v))^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{v(1-v)}} du dv & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{für } y \leq 0. \end{cases}$$

Aus der hier gewonnenen Verteilung erhält man durch Integration nach z von 0 bis 1 die eine SMIRNOWSche Verteilung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left(\sqrt{\frac{n}{2}} \sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - G_n(x)) < y \right) = \begin{cases} 1 - e^{-2y^2}, & \text{für } y > 0 \\ 0, & \text{für } y \leq 0. \end{cases}$$

Durch Integration nach y von 0 bis ∞ erhält man die Grenzverteilung der zufälligen Variablen $\frac{1}{2}(F_n(\xi_0^{(n)} + 0) + G_n(\xi_0^{(n)} + 0))$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z \frac{1}{(v(1-v))^{3/2}} \left(\int_0^\infty u^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{v(1-v)}} du \right) dv = z,$$

d. h., da $F(x) \equiv G(x)$, folgt aus Satz 3. folgendes

Korollar. Ist $F(x) \equiv G(x)$, so ist für $0 \leq z \leq 1$, $\mathbf{P}\{F(\xi_0^{(n)} + 0) < z\} \rightarrow z$, d. h. die Grenzverteilung von $\xi_0^{(n)}$ stimmt mit der gemeinsamen Verteilung von ξ und η überein.

Führen wir folgende Bezeichnung ein:

$$f(y, z) = \frac{y}{z^{3/2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu (2\nu+1) e^{-\frac{1}{2} (2\nu+1)^2 \frac{y^2}{z}}.$$

Satz 4. Ist $F(x) \equiv G(x)$, so ist für $0 \leq z \leq 1$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{n}{2}} \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - G_n(x)| < y, \frac{1}{2} (F_n(\eta_0^{(n)} + 0) + G_n(\eta_0^{(n)} + 0)) < z \right\} = \\ = \begin{cases} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^y \int_0^z f(u, v) f(u, 1-v) du dv, & \text{für } y > 0 \\ 0, & \text{für } y \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Durch Integration nach z von 0 bis 1 erhält man die Verteilung von SMIRNOW bezüglich der absoluten Abweichung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{n}{2}} \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - G_n(x)| < y \right\} = \begin{cases} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^\nu e^{-2\nu^2 y^2}, & \text{wenn } y > 0 \\ 0, & \text{wenn } y \leq 0. \end{cases}$$

Satz 5. Ist $F(x) \equiv G(x)$, so ist

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - G_n(x))}{\frac{1}{2} (F_n(\xi_0^{(n)} + 0) + G_n(\xi_0^{(n)} + 0))} < c \right\} = \\ = \begin{cases} \frac{3}{\sqrt[4]{8}} \int_0^c \sqrt{t} e^{\frac{t^2}{4}} W_{-\frac{7}{4}, \frac{1}{4}} \left(\frac{t^2}{2} \right) dt & \text{für } c > 0, \\ 0, & \text{für } c \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei mit W die sogenannte WHITTAKERSche Funktion bezeichnet wird:

$$W_{\lambda, \mu}(z) = \frac{z^{\mu + \frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\mu - \lambda - \frac{1}{2}} (1+t)^{\mu - \lambda - \frac{1}{2}} dt,$$

wenn

$$\Re(\mu - \lambda) > -\frac{1}{2}, \quad |\arg z| < \pi.$$

Unsere Grenzverteilungssätze 3. und 4. sind im Einklang mit den bekannten in dieser Richtung fallenden Resultaten. (Siehe [3], [9].) Wir bemerken weiter, dass man die erwähnte Grenzverteilungssätze auch durch die von DOOB [5] und DONSKER [4] ausgearbeitete Methode gewinnen kann. Auf diese Fragen wollen wir noch zurückkehren.

3. §. Beweis der Verteilungssätze

Satz 1. wird mit Hilfe eines anschaulichen kombinatorischen Lemmas bewiesen, während der Beweis von Satz 2. durch die Zurückleitung der Behauptung auf ein Irrfahrtsproblem erfolgt. Die Wahrscheinlichkeiten von Satz 2. werden auch mit Hilfe von Differenzengleichungen berechnet; dies führt zur Herstellung mit trigonometrischen Funktionen. Bei dem entsprechenden Grenzverteilungssatz werden wir uns auf die erste Herstellung berufen.

a) Vereinigen wir die vollkommen unabhängigen zufälligen Variablen $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ und $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, die alle dieselbe Verteilung besitzen, zu einer einzigen Folge $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{2n}$; letztere ordnen wir der Grösse nach: $\zeta_1^* < \zeta_2^* < \dots < \zeta_{2n}^*$. Wir interpretieren nun die Variablen $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_{2n}$ derart, dass

$$\mathcal{G}_i = \begin{cases} +1, & \text{wenn } \zeta_i^* = \xi_j \\ -1, & \text{wenn } \zeta_i^* = \eta_h. \end{cases}$$

Also besteht die Folge $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_{2n}$ aus n Stück $+1$ und n Stück -1 . Aus diesen lassen sich jedoch — den verschiedenen Möglichkeiten, wie man die n Stück $+1$ -er in den $2n$ Stellen unterbringen kann, entsprechend — $\binom{2n}{n}$ verschiedene Folgen bilden. Jede dieser Folgen tritt mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auf, da jede Folge je eine geordnete Stichprobe der Variablen ξ und η enthält, und die insgesamt möglichen $(n!)^2$ Permutationen der ξ und η untereinander zu den insgesamt möglichen $(2n)!$ ungeordneten Stichproben von der Grösse $2n$ führen, wobei jede Reihenfolge gleich wahrscheinlich ist.

Betrachten wir nun die Summen

$$\varsigma_i = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \dots + \mathcal{G}_i.$$

Diese Summe gibt den Unterschied der Anzahl derjenigen ξ_j und η_h an, die nicht grösser sind als ζ_i^* . Dies ist jedoch nichts anderes, als $n(F_n(\zeta_i^* + 0) - G_n(\zeta_i^* + 0))$. Damit die in §2. mit $\zeta_0^{(n)}$ bezeichnete zufällige Variable genau

r betragen soll, d. h. die kleinste ganze Zahl, für welche

$$\sup_{-\infty < x < \infty} n(F_n(x) - G_n(x)) = n(F_n(\xi_r^* + 0) - G_n(\xi_r^* + 0))$$

besteht, sein soll; weiterhin dieser Supremalwert genau k betragen soll, müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned} \xi_i &< k & \text{für } 1 \leq i \leq r-1, \\ \xi_r &= k \\ \xi_i &\leq k & \text{für } r+1 \leq i \leq 2n-k. \end{aligned}$$

In diesem Falle ist also

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - G_n(x)) = \frac{k}{n}, \frac{1}{2} (F_n(\xi_0^{(n)} + 0) + G_n(\xi_0^{(n)} + 0)) = \frac{r}{2n} \right\} = \\ (3.1) \quad = \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq i \leq r-1} \xi_i < k, \xi_r = k, \max_{r+1 \leq i \leq 2n-k} \xi_i \leq k \right\}. \end{aligned}$$

Zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit müssen von den $\binom{2n}{n}$ möglichen Folgen $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_{2n}$ zuerst nur diejenigen betrachtet werden, in deren r -tem Abschnitt die Anzahl der $+1$ die Anzahl der -1 genau mit k übertrifft, d. h. in denen $\frac{r+k}{2}$ Stück $+1$ und $\frac{r-k}{2}$ Stück -1 vorkommen. (Also muss $r+k$ gerade sein: $r = k, k+2, \dots$) Es gibt $\binom{r}{\frac{r+k}{2}}$ solche Abschnitte.

Alle diese Folgen kommen jedoch nicht in Frage. Es muss nämlich auch gesichert werden, dass in keiner Teilfolge $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_{r'}$ ($r' < r$) die Anzahl der $+1$ genau mit k die Anzahl der -1 übertrifft. Dies kann man dadurch erreichen, dass man diejenigen Folgen ausschliesst, die — von hinten an betrachtet — einen Abschnitt, in welchem die Anzahl der $+1$ und der -1 übereinstimmt, besitzen. Für diese gilt folgendes, bekanntes

Lemma 1.²⁾ Die Wahrscheinlichkeit dessen, dass eine aus α Stück $+1$ und β Stück -1 ($\alpha > \beta$) zufälligerweise aufgeschriebene Folge einen Abschnitt, in welchem die Anzahl der $+1$ und der -1 übereinstimmt, enthält, beträgt $\frac{2\beta}{\alpha + \beta}$.

In unserem Fall handelt es sich um das gegensätzliche Ereignis bei $\alpha = \frac{r+k}{2}$, $\beta = \frac{r-k}{2}$, und so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{r-k}{r} = \frac{k}{r}$. Also ergibt sich für die Anzahl der geeigneten Folgen des ersten r Abschnittes

$$(3.2) \quad \binom{r}{\frac{r+k}{2}} \frac{k}{r}.$$

²⁾ Siehe z. B. [13], Aufgabe 36., Seite 74; Lösung, Seite 694.

Hiermit ist die Erfüllung der Forderungen $\varsigma_i < k$, $i=1, 2, \dots, r-1$ und $\varsigma_r = k$ gesichert, es muss noch die Forderung $\varsigma_i \leq k$, $i=r+1, \dots, 2n-k$ erfüllt werden. (Die weiteren Summen sind nämlich offensichtlich kleiner als k , da $\varsigma_{2n} = 0$ ist.) Dies können wir dadurch erreichen, dass wir für die Folge $\mathcal{G}_{r+1}, \mathcal{G}_{r+2}, \dots, \mathcal{G}_{2n}$ zwar solche Abschnitte — von vorne betrachtet — in welchen die Anzahl der $+1$ und -1 übereinstimmt, zulassen, jedoch diejenigen Folgen, in deren irgendeinem beliebigen Abschnitt die Anzahl der $+1$ die der -1 übertrifft, ausschliessen. Hierzu gebrauchen wir

Lemma 2.³⁾ Die Wahrscheinlichkeit dessen, dass in keinem Abschnitt einer aus α Stück -1 und β Stück $+1$ ($\alpha \geq \beta$) zufälligerweise aufgeschriebenen Folge die Anzahl der $+1$ die der -1 übertrifft, beträgt $\frac{\alpha+1-\beta}{\alpha+1}$.

Für diejenigen Folgen, die $\alpha = n - \frac{r-k}{2}$ Stück -1 und $\beta = n - \frac{r+k}{2}$ Stück $+1$ enthalten, beträgt diese Wahrscheinlichkeit

$$\frac{2(k+1)}{2n-r+k+2}.$$

Da die Anzahl aller möglichen Folgen $\mathcal{G}_{r+1}, \mathcal{G}_{r+2}, \dots, \mathcal{G}_{2n}$ $\binom{2n-r}{n-\frac{r+k}{2}}$ beträgt, ist die Anzahl der für uns in Frage kommenden Folgen

$$(3.3) \quad \binom{2n-r}{n-\frac{r+k}{2}} \frac{2(k+1)}{2n-r+k+2} = \binom{2n-r+1}{n-\frac{r+k}{2}} \frac{k+1}{2n-r+1}.$$

Da jeder in (3.2) betrachteten Folge $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_r$ jede in (3.3) betrachtete Folge $\mathcal{G}_{r+1}, \mathcal{G}_{r+2}, \dots, \mathcal{G}_{2n}$ angeschlossen werden kann, und da die Anzahl der überhaupt möglichen Folgen $\binom{2n}{n}$ beträgt, ergibt sich für die in (3.1) gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\binom{r}{\frac{r+k}{2}} \binom{2n-r+1}{n-\frac{r+k}{2}} \frac{k(k+1)}{r(2n-r+1)}}{\binom{2n}{n}}.$$

Es ist leicht einzusehen, dass aus Lemma 1. und 2., mit entsprechender Anwendung des obigen Gedankenganges, unsere Behauptung für den Fall $k=0$ folgt. Dadurch ist Satz 1. bewiesen.

b) Bevor wir zum Beweis von Satz 2. übergehen, machen wir eine vorbereitende Bemerkung. Betrachten wir einen Punkt, der an den ganzzahligen Stellen der Zahlengeraden mit der Wahrscheinlichkeit von je $\frac{1}{2}$ nach rechts

³⁾ Siehe [13], Aufgabe 37. (wie in ²⁾).

bzw. nach links herumirrt und von 0 ausgehend, zum ersten Male beim r -ten Schritt die Stelle $+k$ erreicht. Die Zahl aller möglichen verschiedenen Wege dieses herumirrenden Punktes ist nach (3. 2)

$$\binom{r}{\frac{r+k}{2}} \frac{k}{r}.$$

Diese Wege sind nämlich alle derart, dass sie sich nach dem $r-1$ -ten Schritt an der Stelle $k-1$ befunden und mit $k-1$ mehr Schritte nach rechts, als nach links, d. h. $\frac{r+k}{2}-1$ Schritte nach rechts, $\frac{r-k}{2}$ Schritte nach links enthalten haben. Die Anzahl aller solcher Wege ist

$$\binom{r-1}{\frac{r+k}{2}-1}.$$

Davon muss jedoch die Anzahl derjenigen Wege abgezogen werden, die die Stelle $+k$ schon erreicht oder übertreten haben. Nach dem bekannten Spiegelungsprinzip ist dies gleich der Anzahl der aus 0 ausgehenden, in $r-1$ Schritten genau die Stelle $k+1$ erreichenden Wege. Diese Zahl beträgt, auf ähnlicher Art, wie vorhin,

$$\binom{r-1}{\frac{r+k}{2}}$$

und die gesuchte Zahl — die Anzahl der die Stelle k zum erstenmal in r Schritten erreichenden Wege — ist demnach

$$\binom{r-1}{\frac{r+k}{2}-1} - \binom{r-1}{\frac{r+k}{2}} = \binom{r}{\frac{r+k}{2}} \frac{k}{r}.$$

c) Die Bestimmung der in Satz 2. auftretenden Wahrscheinlichkeiten kann ebenfalls auf die Folgen $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_{2n}$ und auf den Nachweis der Behauptungen bezüglich der daraus gebildeten ξ_i Summen zurückgeführt werden. Dem Gedankengang von Punkt a) entsprechend kann nämlich auch die Behauptung

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - G_n(x)| = \frac{k}{n}, \frac{1}{2} (F_n(r_0^{(n)} + 0) + G_n(r_0^{(n)} + 0)) = \frac{r}{2n} \right\} = \\ = \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq i \leq r-1} |\xi_i| < k, |\xi_r| = k, \max_{r+1 \leq i \leq 2n} |\xi_i| \leq k \right\} \end{aligned}$$

eingesehen werden.

Dementsprechend muss man aus den $\binom{2n}{n}$ verschiedenen Reihenfolgen

der \mathcal{G}_i ($i=1, 2, \dots, 2n$) die Anzahl derer feststellen, die den Bedingungen

$$\begin{aligned} |\zeta_i| &< k, & i=1, 2, \dots, r-1, \\ |\zeta_r| &= k, \\ |\zeta_i| &\leq k, & i=r+1, r+2, \dots \end{aligned}$$

genügen. Dem im Punkt **b)** gesagten gemäss ist dies gleich der Anzahl der α . aus 0 ausgehenden und zum erstenmal beim r -ten Schritt eine der Stellen $+k$ oder $-k$ erreichenden, β . weiterhin die Stellen $+k$ und $-k$ nicht übertretenden und beim $2n$ -ten Schritt wieder in die Nullstelle zurückgelangenden Wege.

Wir bezeichnen die Anzahl derjenigen Wege, die α . erfüllen, mit $2A_r^{(k)}$. Dann ist offensichtlich $A_r^{(k)}$ die Anzahl derjenigen Wege, die von 0 ausgehend, zum erstenmal beim r -ten Schritt die Stelle $+k$ erreichend und bis dahin die Stelle $-(k-1)$ nicht übertreten haben. Wir bestimmen die Anzahl dieser Wege mit Hilfe des Spiegelungsprinzips.

Die Anzahl derjenigen Wege, die von 0 ausgehend, zum erstenmal beim r -ten Schritt die Stelle k erreichen, ist — laut **b)** —

$$(3.2) \quad \binom{r}{\frac{r+k}{2}} \frac{k}{r}.$$

Dies enthält jedoch auch jene Wege, die die Stelle $-k$ erreicht oder übertreten haben. Spiegeln wir den von 0 bis $-k$ reichenden Teil dieser Wege über den Punkt $-k$. Damit gehen diese Wege in solche über, die von $-2k$ ausgehend, zum erstenmal im r -ten Schritt die Stelle $+k$ erreichen. Die Zahl aller solcher Wege beträgt — in (3.2) an stelle von k $3k$ setzend,

$$(3.4) \quad \binom{r}{\frac{r+3k}{2}} \frac{3k}{r}.$$

Wenn wir (3.4) von (3.2) subtrahieren, so bringen wir damit auch solche Wege zum Abzug, die von $-2k$ ausgehend, die Stelle $-3k$ erreicht haben, also vor der Spiegelung die Stelle $+k$ übertreten haben, sind so in (3.2) nicht enthalten. Die Zahl dieser Wege muss also zur Differenz von (3.2) und (3.4) addiert werden. Diese Wege gehen durch Spiegelung der ersten — von $-2k$ bis $-3k$ reichenden — Strecke über die Stelle $-3k$ in solche Wege über, die von $-4k$ ausgehend, zum erstenmal beim r -ten Schritt die Stelle $+k$ erreichen. Die Zahl dieser ist — in (3.2) anstatt k nun $5k$ setzend —

$$\binom{r}{\frac{r+5k}{2}} \frac{5k}{r}.$$

Dieses Verfahren kann man so lange fortsetzen, bis die Stelle $+k$ in r Schritten von der entsprechenden Stelle $-2\nu k$ erreichbar ist, jedoch von der

Stelle $-(2\nu+1)k$ nicht mehr. Die Bedingung dessen ist, dass

$$2\nu k \leq r < (2\nu+1)k,$$

d. h.

$$\nu = \left[\frac{r}{2k} \right].$$

Durch dieses Verfahren erhält man für $A_r^{(k)}$ den folgenden Ausdruck:

$$A_r^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{r}{2k} \right]} (-1)^\nu \binom{r}{\frac{r+k}{2} + \nu k} \frac{(2\nu+1)k}{r}.$$

Betrachten wir nun die in β . angegebenen Wege in entgegengesetzter Richtung. Von der Nullstelle ausgehend, sollen diese in $2n-r$ Schritten $+k$ oder $-k$ erreichen und in der Zwischenzeit diese Stellen nicht übertreten haben. Die Anzahl solcher Wege ist jedoch gleich der Zahl der von 0 ausgehenden, in $2n-r+1$ Schritten zum erstenmal die Stellen $(k+1)$ oder $-(k+1)$ erreichenden Wege. Diese Zahl beträgt also $2A_{2n-r+1}^{(k+1)}$. Damit diese Wege sich den vorigen an den Stellen $+k$ oder $-k$ anschliessen, erhält man als die Anzahl der geeigneten Wege die Hälfte des Produktes der beiden Zahlen, also $2A_r^{(k)} A_{2n-r+1}^{(k+1)}$, womit die erste Behauptung von Satz 2. bewiesen ist.

d) Zur trigonometrischen Herstellung ⁴⁾ der in Satz 2. auftretenden Wahrscheinlichkeiten verfassen wir ein etwas allgemeineres Irrfahrtsproblem. Wir suchen die Wahrscheinlichkeit dessen, dass ein aus der Stelle z ausgehender Punkt ($-k < z < k$, z ganzzahlig) zum erstenmal beim r -ten Schritt eine der Stellen $+k$ oder $-k$ erreicht. Der irrfahrende Punkt tritt von jeder ganzzahligen Stelle mit den Wahrscheinlichkeiten von je $\frac{1}{2}$ an diebenachbarten ganzzahligen Stellen über. Später werden wir an Stelle von z 0 setzen, um auf die benötigten Wahrscheinlichkeiten zu schliessen.

Es bezeichne $p_{z,r}^{(k)} = p_{z,r}$ die gesagte Wahrscheinlichkeit. Hierfür ergibt sich die folgende Differenzengleichung:

$$p_{z,r} = \frac{1}{2} p_{z-1, r-1} + \frac{1}{2} p_{z+1, r-1}.$$

Die Anfangsbedingungen sind:

$$\begin{aligned} p_{k,0} &= p_{-k,0} = 1, \\ p_{k,r} &= p_{-k,r} = 0, \quad r \geq 1, \\ p_{z,0} &= 0, \quad -(k-1) \leq z \leq k-1. \end{aligned}$$

Führen wir die Generatorenfunktion der Wahrscheinlichkeiten $p_{z,r}$ ein:

$$G_z(u) = \sum_{r=0}^{\infty} p_{z,r} u^r \quad -k < z < k,$$

dabei ist

$$(3.5) \quad G_k(u) = G_{-k}(u) = 1.$$

⁴⁾ Siehe auch [6] S. 292.

Aus der obigen Differenzengleichung ergibt sich — mit Beachtung der Anfangsbedingungen — für die Generatorenfunktion die Differenzengleichung

$$G_z(u) = \frac{1}{2} u G_{z-1}(u) + \frac{1}{2} u G_{z+1}(u),$$

deren Lösung wir aus partikulären Lösungen von der Form

$$G_z(u) = (\varphi(u))^z$$

herstellen. Für $\varphi(u)$ gilt die Gleichung

$$u \varphi(u)^2 - 2\varphi(u) + u = 0,$$

woraus

$$\varphi_1(u) = \frac{1}{u} + \sqrt{\frac{1}{u^2} - 1}$$

$$\varphi_2(u) = \frac{1}{u} - \sqrt{\frac{1}{u^2} - 1} = \frac{1}{\varphi_1(u)}.$$

Es sei nun

$$G_z(u) = A(\varphi_1(u))^z + B(\varphi_2(u))^z,$$

wobei die Parameter A und B derart gewählt werden, dass $G_z(u)$ die Anfangsbedingungen (3.5) erfüllt:

$$A(\varphi_1(u))^k + B(\varphi_2(u))^k = 1,$$

$$A(\varphi_1(u))^{-k} + B(\varphi_2(u))^{-k} = 1.$$

Daraus ergibt sich

$$A = B = \frac{1}{(\varphi_1(u))^k + (\varphi_2(u))^k}$$

und

$$G_z(u) = \frac{(\varphi_1(u))^z + (\varphi_2(u))^z}{(\varphi_1(u))^k + (\varphi_2(u))^k},$$

d. h. für $z = 0$

$$G_0(u) = \frac{2}{(\varphi_1(u))^k + (\varphi_2(u))^k}.$$

Es ist jedoch bekannt, dass für das k -te TSCHEBISSEFFSche Polynom folgende Herstellung gilt:

$$2T_k(x) = (x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x - \sqrt{x^2 - 1})^k = 2^k x^k + \dots,$$

woraus sich

$$G_0(u) = \frac{1}{T_k\left(\frac{1}{u}\right)} = \frac{u^k}{2^{k-1} \prod_{r=1}^k \left(1 - u \cos(2r-1) \frac{\pi}{2k}\right)}$$

ergibt. Die rechte Seite in Partialbrüche zerlegt, erhalten wir die Herstellung

$$G_0(u) = \frac{u^k}{2^{k-1}} \sum_{\nu=1}^k \frac{A_\nu}{1 - u \cos(2\nu-1) \frac{\pi}{2k}},$$

wobei

$$A_\nu = \frac{\cos^k(2\nu-1) \frac{\pi}{2k}}{\prod_{\nu'=1}^k \left(\cos(2\nu-1) \frac{\pi}{2k} - \cos(2\nu'-1) \frac{\pi}{2k} \right)} = \frac{2^{k-1} \cos^k(2\nu-1) \frac{\pi}{2k}}{T'_k \left(\cos(2\nu-1) \frac{\pi}{2k} \right)}.$$

Es ist jedoch bekannt,⁵⁾ dass

$$\frac{1}{k} T'_k(\cos \psi) = \frac{\sin k\psi}{\sin \psi}$$

und so

$$A_\nu = \frac{2^{k-1} \cos^k(2\nu-1) \frac{\pi}{2k} \sin(2\nu-1) \frac{\pi}{2k}}{k \sin(2\nu-1) \frac{\pi}{2}}.$$

Dabei ist

$$\sin(2\nu-1) \frac{\pi}{2} = (-1)^\nu$$

und deshalb erhalten wir den Ausdruck

$$G_0(u) = \frac{u^k}{k} \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \frac{\cos^k(2\nu-1) \frac{\pi}{2k} \sin(2\nu-1) \frac{\pi}{2k}}{1 - u \cos(2\nu-1) \frac{\pi}{2k}}.$$

Durch Entwicklung in Potenzreihe nach u erhält man als den Koeffizienten von u^r die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p_{0,r}^{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{\nu=1}^k (-1)^{\nu-1} \cos^r(2\nu-1) \frac{\pi}{2k} \sin(2\nu-1) \frac{\pi}{2k} \quad (k+r \text{ gerade}).$$

Aus dieser Wahrscheinlichkeit bestimmen wir nun die Anzahl der den Bedingungen

$$\begin{aligned} |\xi_i| &< k, & i = 1, 2, \dots, r-1, \\ |\xi_r| &= k \end{aligned}$$

entsprechenden Wege. Die zur Wahrscheinlichkeit $p_{0,r}^{(k)}$ gehörende Anzahl aller möglichen verschiedenen Wege beträgt 2^r , da aus dem Nullpunkt ausgehend insgesamt so viele verschiedene Wege in r Schritten gemacht werden können. Deshalb ist die Zahl der günstigen — die Bedingungen erfüllenden — Wege

$$B_r^{(k)} = 2^r p_{0,r}^{(k)}.$$

⁵⁾ Siehe z. B. [10], Band II. S. 75.

Man kann auf ähnlicher Weise, wie in Punkt **b.**, einsehen, dass die Anzahl der aus $+k$ oder $-k$ zu 0 führenden verschiedenen solcher Wege, die $+k$ oder $-k$ nicht überschreiten,

$$B_{2n-r+1}^{(k+1)} = 2^{2n-r+1} p_{0, 2n-r+1}^{(k+1)}$$

beträgt. Ebenso kann man nach dem Gedankengang von Punkt **b.** einsehen, dass aus den überhaupt möglichen $\binom{2n}{n}$ verschiedenen Stichproben von der Grösse $2n$ die Anzahl derer, die den Bedingungen

$$|\xi_i| < k, \quad i = 1, 2, \dots, r-1,$$

$$|\xi_r| = k,$$

$$|\xi_i| \leq k, \quad i = r+1, r+2, \dots, 2n-k$$

entsprechen,

$$\frac{1}{2} B_r^{(k)} B_{2n-r+1}^{(k+1)}$$

ist, d. h. wir gelangen zum Ergebnis

$$\frac{B_r^{(k)} B_{2n-r+1}^{(k+1)}}{2 \binom{2n}{n}},$$

was die Behauptung von Satz 2. war.

4. §. Beweis der Grenzverteilungssätze

Bezeichnen wir die in den endlichen Verteilungssätzen auftretenden Wahrscheinlichkeiten einheitlich mit $P_{r,k}^{(n)}$ und definieren wir das zufällige Variablenpaar $(x^{(n)}, q^{(n)})$, welches auf jedem Rechteck

$$\frac{k}{2\sqrt{2n}} \leq x^{(n)} < \frac{k+1}{2\sqrt{2n}}, \quad \frac{r}{2n} \leq q^{(n)} < \frac{r+2}{2n},$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n; r = k, k+2, \dots, 2n-k)$$

gleichverteilt, mit der Dichte $2\sqrt{2} n^{3/2} P_{k,r}^{(n)}$, anderswo mit der Dichte 0 ist. Wir beweisen, dass die Folge der Dichtefunktionen in jedem Punkt des unendlichen Streifens $0 \leq x \leq \infty$, $0 \leq q \leq 1$ der Ebene (x, q) einer solchen integrierbaren Dichtefunktion zustrebt, welche in jedem abgeschlossenen Bereich, das die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 0)$ nicht enthält, beschränkt ist. Bleiben nämlich k und r beschränkt, so wächst die Dichte $n^{3/2} P_{k,r}^{(n)}$ in der Ordnung von \sqrt{n} . Schliessen wir also eine beliebig kleine, kreisviertelförmige Umgebung der obigen Punkte aus. Wir können den Satz von LEBESGUE auf jedem beschränkten Teil des Streifens, der diese Umgebung nicht enthält, anwenden. Dieser sagt aus, dass wenn eine Folge nichtnegativer, integrierbarer Funktionen einer beschränkten, integrierbaren Funktion zustrebt, so strebt die Folge der Integ-

rale dem Integral der Grenzfunktion zu. Die Wahrscheinlichkeit des ausgeschlossenen Teiles kann jedoch bei der Grenzfunktion, die auch in dieser Umgebung integrierbar ist, beliebig klein gemacht werden; ebenso können die Integrale der Glieder der Folge beliebig verkleinert werden, also werden unsere Grenzverteilungssätze — im Grenzübergang — auch dann gültig sein, wenn wir die Punkte nicht ausschliessen. Wir wünschen zu bemerken, dass es genügen würde, eine solche Umgebung der genannten Punkte auszuschliessen, die durch die Geraden $\varrho=0$, bzw. $\varrho=cx$ und $\varrho=0$, bzw. $\varrho=1-cx$ ($c>0$, beliebig klein) weiterhin durch beliebig kleine Kreisbögen um die Punkte $(0,0)$, bzw. $(1,0)$ gebildet werden. Letztere Bemerkung ist besonders für Satz 5. von Interesse, da hier das ersterwähnte kritische Winkelbereich vom Integrationsbereich von vornherein, ausgeschlossen ist.

Beim Beweis der Grenzverteilungssätze machen wir von folgenden einfachen, bekannten Zusammenhängen gebrauch:

$$(4.1) \quad \binom{2N}{N} \sim \frac{2^{\frac{2N+1}{2}}}{\sqrt{2\pi N}}.$$

Ist $c = \{u\sqrt{2N}\}$, wobei $\{a\}$ diejenige kleinste ganze Zahl bezeichnet, für welche $\geq a$ gilt, so ist

$$(4.2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\binom{2N}{N+c}}{\binom{2N}{N}} = e^{-2u^2}.$$

A) Beim Beweis von Satz 3. gehen wir von der Form

$$P_{r,k}^{(n)} = \frac{2k(k+1)}{r(2n-r+k+2)} \frac{\binom{r}{\frac{r}{2} + \frac{k}{2}} \binom{2n-r}{\frac{2n-r}{2} + \frac{k}{2}}}{\binom{2n}{n}}$$

aus, welche eine etwas abgeänderte Form der im Satz auftretenden, für $k=1, 2, \dots, n$ gültigen Wahrscheinlichkeiten ist. Stellen wir diese Wahrscheinlichkeit in folgender Form her:

$$P_{r,k}^{(n)} = \frac{2k(k+1)}{r(2n-r+k+2)} \frac{\binom{r}{\frac{r}{2} + \frac{k}{2}}}{\binom{r}{\frac{r}{2}}} \frac{\binom{2n-r}{\frac{2n-r}{2} + \frac{k}{2}}}{\binom{2n-r}{\frac{2n-r}{2}}} \frac{\binom{r}{k} \binom{2n-r}{\frac{2n-r}{2}}}{\binom{2n}{n}}.$$

Es sei nun

$$\bar{y} = \frac{k}{2\sqrt{r}} \quad \text{und} \quad z = \frac{r}{2n},$$

dann ist

$$\frac{k}{2} = \bar{y} \sqrt{r} = \bar{y} \sqrt{\frac{z}{1-z}} \sqrt{2n-r},$$

$$dz = \frac{1}{n} (dr = 2(!)), \quad 2n-r = 2n(1-z)$$

$$\bar{y} \sqrt{z} = \frac{k}{2\sqrt{2n}}, \quad d(\bar{y} \sqrt{z}) = \frac{1}{2\sqrt{2n}}.$$

Demgemäss ist nach (4.1)

$$\frac{\binom{r}{\frac{r}{2} + \frac{k}{2}}}{\binom{r}{\frac{r}{2}}} \rightarrow e^{-2\bar{y}^2},$$

$$\frac{\binom{2n-r}{\frac{2n-r}{2} - \frac{k}{2}}}{\binom{2n-r}{\frac{2n-r}{2}}} \rightarrow e^{-2\bar{y}^2 \frac{z}{1-z}}$$

und nach (4.2)

$$2\sqrt{2n} \frac{\binom{r}{\frac{r}{2}} \binom{2n-r}{\frac{2n-r}{2}}}{\binom{2n}{n}} \sim 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{4n^2}{r(2n-r)}} = 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{1}{z(1-z)}},$$

weiterhin

$$n \frac{2k(k+1)}{r(2n-r+k+2)} \sim n \frac{2k^2}{r(2n-r)} = 4\bar{y}^2 \frac{1}{1-z}.$$

Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{2} n^{3/2} P_{k,r}^{(n)} = \frac{16}{\sqrt{2\pi}} e^{-2\bar{y}^2 \frac{1}{1-z}} \cdot \frac{\bar{y}^2}{\sqrt{z} \sqrt{(1-z)^3}}.$$

Mit Anwendung der Substitution $y = 2\bar{y}\sqrt{z}$ gelangen wir zur Dichtefunktion

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y^2}{(z(1-z))^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{y^2}{z(1-z)}}$$

und hiermit zum Beweis von Satz 3.

B) Führen wir die Bezeichnung

$$F(y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \int_0^z \frac{u^2}{(v(1-v))^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{v(1-v)}} du dv$$

ein. Dann muss $F(y, 1)$ die SMIRNOWSche Verteilung ergeben. Wahrlich, wegen der Symmetrie in $v = \frac{1}{2}$ und mit der Substitution von

$$\frac{1}{v(1-v)} = t^2 + 4, \quad dt = -\frac{2}{(v^2 + 4)^{3/2}} dv,$$

ergibt sich für

$$\begin{aligned} F(y, 1) &= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y u^2 \left(\int_0^{1/2} \frac{1}{(v(1-v))^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{v(1-v)}} dv \right) du = \\ &= 4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y u^2 e^{-2u^2} \left(\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} u^2 t^2} dt \right) du = 4 \int_0^y u e^{-2u^2} du = 1 - e^{-2y^2}. \end{aligned}$$

C) Berechnen wir $G(z) = F(\infty, z)$.

$$G(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z \frac{1}{(v(1-v))^{3/2}} \left(\int_0^\infty u^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{v(1-v)}} du \right) dv = z,$$

wobei wir bei der Berechnung des Integrals nach u von der Substitution

$$u^2(v(1-v)) = w^2$$

gebrauch machen.

D) Der Beweis des Grenzwertsatzes 4. kann in analoger Weise, wie der Beweis von Satz 3., erfolgen. Da die in Satz 2. auftretenden Reihen absolut konvergent sind, kann der Grenzübergang des Produktes der beiden Reihen gliedweise durchgeführt werden. Hierbei muss man für jedes fixen v von dem Zusammenhang

$$\frac{\left(\frac{r}{2} + \frac{(2v+1)k}{2} \right)}{\left(\frac{r}{2} \right)} \rightarrow e^{-2(2v+1)^2 \bar{y}^2}$$

gebrauch machen für $r \rightarrow \infty$, $k = 2\{\sqrt{r}\bar{y}\}$.

E) Nun wollen wir zeigen, dass die Randverteilung der in Satz 4. auftretenden Verteilung mit der SMIRNOWSchen Verteilung der absoluten Abwei-

chung übereinstimmt. Deshalb integrieren wir die Dichtefunktion nach z von 0 bis 1:

$$\sqrt{\frac{8}{\pi}} y^2 \int_0^1 \frac{1}{(z(1-z))^{3/2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} (2\nu+1) e^{-\frac{1}{2}(2\nu+1)^2 \frac{y^2}{z}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} (2\mu+1) e^{-\frac{1}{2}(2\mu+1)^2 \frac{y^2}{1-z}} dz.$$

Wir ordnen das Produkt der beiden Reihen nach den Gliedern $\mu + \nu + 1 = \text{const.}$ und integrieren gliedweise. Das allgemeine Glied des Produktes ist

$$(4.3) \quad \sqrt{\frac{8}{\pi}} (-1)^{\nu+\mu} (2\nu+1)(2\mu+1) y^2 \int_0^1 \frac{1}{(z(1-z))^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}(2\nu+1)^2 \frac{y^2}{z} - \frac{1}{2}(2\mu+1)^2 \frac{y^2}{1-z}} dz.$$

Führen wir die Bezeichnung $A_s = \frac{1}{2}(2s+1)^2 y^2$ ein und wenden wir die Transformation

$$\frac{1}{z} = u^2 + 1$$

an; dann ist

$$\frac{1}{1-z} = \frac{u^2 + 1}{u^2}, \quad dz = -\frac{2u du}{(u^2 + 1)^2}$$

und unser Integral geht über in

$$8 \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^{\nu+\mu} \sqrt{A_{\nu} A_{\mu}} e^{-A_{\nu} - A_{\mu}} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) e^{-A_{\nu} u^2 - \frac{A_{\mu}}{u^2}} du.$$

Den letzten Teil dieses Ausdruckes stellen wir folgendermassen her:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) e^{-A_{\nu} u^2 - \frac{A_{\mu}}{u^2}} du &= \left(1 + \sqrt{\frac{A_{\nu}}{A_{\mu}}}\right) \int_0^{\infty} e^{-A_{\nu} u^2 - \frac{A_{\mu}}{u^2}} du - \\ &- \frac{1}{\sqrt{A_{\mu}}} \int_0^{\infty} \left(\sqrt{A_{\nu}} - \frac{\sqrt{A_{\mu}}}{u^2}\right) e^{-A_{\nu} u^2 - \frac{A_{\mu}}{u^2}} du. \end{aligned}$$

Das zweite Glied der rechten Seite verschwindet, da das Integral von $u=0$

bis $u = \sqrt{\frac{A_{\mu}}{A_{\nu}}}$ vom Vorzeichen abgesehen mit dem Integral von $u = \sqrt{\frac{A_{\mu}}{A_{\nu}}}$ bis

$u = \infty$ übereinstimmt. Mit der Substitution von $u = \sqrt{\frac{A_{\mu}}{A_{\nu}}} \frac{1}{v}$ ist nämlich

$$A_{\nu} u^2 + \frac{A_{\mu}}{u^2} = A_{\nu} v^2 + \frac{A_{\mu}}{v^2},$$

$$\left(\sqrt{A_{\nu}} - \frac{\sqrt{A_{\mu}}}{u^2}\right) du = \left(\sqrt{A_{\nu}} - \frac{\sqrt{A_{\mu}}}{v^2}\right) dv$$

und $u=0$ entspricht

$$v=\infty, u=\sqrt[4]{\frac{A_\mu}{A_\nu}} \text{ entspricht } v=\sqrt[4]{\frac{A_\mu}{A_\nu}}.$$

Das erste Glied der rechten Seite ist das bekannte Integral

$$\int_0^\infty e^{-A_\nu u^2 - \frac{A_\mu}{u^2}} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{A_\nu}} e^{-2\sqrt{A_\nu A_\mu}}.$$

So erhält man für das Glied (4.3)

$$(-1)^{\nu+\mu} 4\sqrt{2} (\sqrt{A_\nu} + \sqrt{A_\mu}) e^{-(\sqrt{A_\nu} + \sqrt{A_\mu})^2} = 4(-1)^{\nu+\mu} (\nu + \mu + 1) y e^{-2(\nu+\mu+1)^2 y^2}.$$

Es sei $\nu + \mu + 1 = s$ fixe Zahl; durch Summation für $\nu = 0, 1, 2, \dots, s-1$, also insgesamt $\nu + \mu + 1$ Glieder, erhält man

$$4(-1)^{s-1} s^2 y e^{-2s^2 y^2},$$

d. h. man gelangt zur Reihe

$$4 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s-1} s^2 y^2 e^{-2s^2 y^2},$$

welche gleich der Dichtefunktion der SMIRNOWSchen Verteilung ist.

F) Wir bezeichnen mit D jenes dreieckförmige Bereich der (y, z) Ebene, welches durch die Punkte $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(1, c)$ gebildet wird, wobei $c > 0$. Laut dem am Anfang dieses §-s gesagten besteht folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - G_n(x))}{\frac{1}{2} (F_n(\xi_0^{(n)} + 0) + G_n(\xi_0^{(n)} + 0))} < c \right\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \iint_D \frac{u^2}{(v(1-v))^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{v(1-v)}} du dv. \end{aligned}$$

Das letztere Integral kann folgenderweise geschrieben werden:

$$\Phi(c) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \left(\int_0^{cv} \frac{u^2}{(v(1-v))^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{v(1-v)}} du \right) dv.$$

Gehen wir zur Ableitung über:

$$\Phi'(c) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} c^2 \int_0^1 \frac{v^{\frac{3}{2}}}{(1-v)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{1}{2} c^2 \frac{v}{1-v}} dv$$

und führen wir die Substitution

$$\frac{v}{1-v} = t, \quad dv = \frac{dt}{(1+t)^2}$$

durch:

$$\Phi'(c) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} c^2 \int_0^{\infty} \frac{t^{3/2}}{(1+t)^2} e^{-\frac{1}{2} c^2 t} dt.$$

Das letztere Integral ist nicht elementar, kann jedoch durch die WHITTAKERsche Funktion ausgedrückt werden:

$$\int_0^{\infty} e^{-at} t^{\mu-\lambda-\frac{1}{2}} (1+t)^{\mu+\lambda-\frac{1}{2}} dt = \Gamma(\mu-\lambda+\frac{1}{2}) a^{-\mu-\frac{1}{2}} e^{-\frac{a}{2}} W_{\lambda, \mu}(a).$$

In unserem Falle ist $a = \frac{c^2}{2}$, $\lambda = -\frac{7}{4}$, $\mu = \frac{1}{4}$ und so ist

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{c^2}{2} t} t^{3/2} (1+t)^{-2} e^{-\frac{1}{2} c^2 t} dt = \frac{3}{\sqrt{8}} \sqrt{\pi} c^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{c^2}{4}} W_{-\frac{7}{4}, \frac{1}{4}}\left(\frac{c^2}{2}\right)$$

woraus wir für $\Phi(c)$ den in Satz 5. angegebenen Ausdruck erhalten.

(Eingegangen: 6. VII. 1957.)

LITERATUR

- [1] ANDERSON, T. V.—DARLING, D. A.: „Asymptotic theory of certain »goodness of fit« criteria based on stochastic processes”. *Annals of Mathematical Statistics* **23** (1952) 193—212.
- [2] BIRNBAUM, Z. W.—PYKE, R.: „On some distributions related to the statistic D_n^+ ”. *Annals of Mathematical Statistics* (in Erscheinung).
- [3] DARLING, D. A.—SIEGERT, A. J. F.: „The first passage problem for a continuous Markov process”. *Annals of Mathematical Statistics* **24** (1953) 624—639.
- [4] DONSKEr, M. D.: „Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov—Smirnov theorems”. *Annals of Mathematical Statistics* **23** (1952), 277—281.
- [5] DOOB, J. L.: „Heuristic approach to the Kolmogorov—Smirnov theorems”. *Annals of Mathematical Statistics* **20** (1949), 393—403.
- [6] FELLER, W.: *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. I. Wiley, New York, 1950.
- [7] Гнеденко, Б. В.—Королюк, В. С.: „О максимальном расхождении двух эмпирических распределений”. Доклады Академии Наук СССР **80** (1951) 525—528.
- [8] KOLMOGOROFF, A. N.: „Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione”. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari* **4** (1933) 83—91.
- [9] LEVY, P.: *Processus stochastique et mouvement Brownien*. Gauthier-Villars, Paris, 1948.
- [10] PÓLYA, G.—SZEGÖ, G.: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. Springer, Berlin, 1925.
- [11] RÉNYI, A.: „A rendezett minták elméletéről”. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **3** (1953) 467—503.
- [12] RÉNYI, A.: „On the theory of order statistics”. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **4** (1953) 191—232.
- [13] RÉNYI, A.: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
- [14] Смирнов, Н. В.: „Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках”. *Bulletin Mathématique de l'Université de Moscou* **2** (1939) 3—14.
- [15] WANG SHOU-YEN: „On the limiting distribution of the ratio of two empirical distribution”. *Acta Mathematica Sinica* **5** (1955) 253—267.

KÉT MINTA ÖSSZEHASONLÍTÁSA A MINTAELEMEK KÉT STATISZTIKAI FÜGGVÉNYE ALAPJÁN

VINCZE ISTVÁN

Kivonat

Az irodalomban számos kritérium ismeretes, amely annak eldöntésére szolgál, hogy két minta azonos eloszlásból származik-e. E próbák sokszor nem eléggé érzékenyek bizonyos ellenhipotézisekre. Közelfekvő gondolat illeszkedési próbák finomítására olyan statisztikai próbák konstruálása, amelyek a mintaelemek két (esetleg több) jól megválasztott statisztikai függvényén alapulnak. — Jelen dolgozatban néhány kétváltozós eloszlás- és határeloszlástételt bizonyítunk be, amelyek ilyen próbák konstruálására alkalmasak. Néhány további határeloszlástételt, összefüggéseket ismert határeloszlástételekkel, továbbá a próbák alkalmazásához szükséges táblázatokat — egyenlő darabszámú minták esetére — egy további közleményben kívánunk publikálni.

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ és $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ az $F(x)$, illetve $G(x)$ eloszlásfüggvénnyel bíró ξ , illetve η valószínűségi változókból vett n elemű minták. Jelölje $F_n(x)$, illetve $G_n(x)$ a megfelelő empirikus eloszlásfüggvényeket. Legyenek végül $\xi_0^{(n)}$ és $\eta_0^{(n)}$ azok az „első” helyek, ahol az

$$(F_n(x) - G_n(x)), \text{ illetve } |F_n(x) - G_n(x)|$$

függvények maximális értéküket felveszik; vagyis a maximum-helyek alsó határai. E jelölésekkel a következő tételek állanak:

1. tétel. Ha $F(x) \equiv G(x)$, akkor

$$P \left\{ \begin{array}{l} \sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - G_n(x)) = \frac{k}{n}, \quad \frac{1}{2} (F_n(\xi_0^{(n)} + 0) + G_n(\xi_0^{(n)} + 0)) = \frac{r}{2n} \Bigg\} = \\ \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{ha } k < 0 \text{ vagy } k+r \text{ páratlan} \\ \frac{1}{(r-1)(2n-r+2)} \frac{\left(\frac{r}{2}\right) \left(2n-r\right)}{\left(n-\frac{r}{2}\right)} \frac{\left(2n\right)}{\left(n\right)}, & \text{ha } k=0, \quad r=2, 4, \dots, \\ \frac{k(k+1)}{r(2n-r+1)} \frac{\left(\frac{r+k}{2}\right) \left(2n-r+1\right)}{\left(n-\frac{r+k}{2}\right)} \frac{\left(2n\right)}{\left(n\right)}, & \text{ha } k=1, 2, \dots, n; \\ & r=k, \quad k+2, \dots, 2n-k. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Minthogy fenti eloszlásunknak peremeloszlása a GNYEGYENKO—KOROLJUK-féle [7] egyoldalú eltérésre vonatkozó véges eloszlás, ennélfogva valószínűség-

számítási bizonyítását nyertük a következő azonosságoknak

$$\sum_{(r)}^* \frac{k(k+1)}{r(2n-r+1)} \binom{r}{\frac{r+k}{2}} \binom{2n-r+1}{n-\frac{r+k}{2}} = \frac{2k+1}{n+k+1} \binom{2n}{n-k},$$

ahol az összegezés $r=k, k+2, \dots, 2n-k$ -ra értendő, míg $1 \leq k \leq n$.

A $k=0$ esetre

$$\sum_{(r)}^* \frac{1}{(r-1)(2n-r+2)} \binom{r}{\frac{r}{2}} \binom{2n-r}{n-\frac{r}{2}} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n},$$

ahol az összegezés $r=2, 4, 6, \dots$ -ra vonatkozik.

Vezessük be a következő jelölést:

$$A_r^{(k)} = \sum_{v=0}^{\left[\frac{r}{2n}\right]} (-1)^v \binom{r}{\frac{r+k}{2} + vk} \frac{(2v+1)k}{r}.$$

2. tétel. Ha $F(x) \equiv G(x)$, akkor

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - G_n(x)| = \frac{k}{n}, \quad \frac{1}{2} (F_n(\eta_0^{(n)} + 0) + G_n(\eta_0^{(n)} + 0)) = \frac{r}{2n} \right\} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{ha } k < 0 \text{ vagy } r+k \text{ páratlan,} \\ \frac{2A_r^{(k)} A_{2n-r+1}^{(k+1)}}{\binom{2n}{n}}, & \text{ha } k=1, 2, \dots, n; r=k, k+2, \dots, 2n-k. \end{cases}$$

Az 1. tétel bizonyítása két egyszerű kombinatorikus lemmán alapszik, míg a 2. tétel bizonyítását bolyongási feladatra vezettük vissza.

Fenti eloszlástételekből a megfelelő határeloszlástételeket úgy nyerjük, hogy n növelésével r -et n -rendben, míg k -t \sqrt{n} rendben tartatjuk végtelen felé, pontosabban

$$k \sim \sqrt{2ny}, \quad r \sim 2nz.$$

3. tétel. Ha $F(x) \equiv G(x)$, akkor $-0 \leq z \leq 1$ -re —

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \sqrt{\frac{n}{2}} \sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - G_n(x)) < y, \quad \frac{1}{2} (F_n(\xi_0^{(n)} + 0) + G_n(\xi_0^{(n)} + 0)) < z \right\} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \int_0^z \frac{u^2}{(v(1-v))^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{v(1-v)}} du dv, & \text{ha } y > 0, \\ 0, & \text{ha } y \leq 0. \end{cases}$$

Eloszlásunk peremeloszlása a SZMIRNOV-féle [14] eloszlás, vagyis z szerint integrálva nyerjük

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \sqrt{\frac{n}{2}} \sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - G_n(x)) < y \right\} = \begin{cases} 1 - e^{-2y^2}, & \text{ha } y > 0, \\ 0, & \text{ha } y \leq 0. \end{cases}$$

Ha y szerint integrálunk 0-tól ∞ -ig, akkor egyenletes eloszláshoz jutunk, amiből adódik, hogy a $\xi_0^{(n)}$ változó határeloszlása megegyezik ξ és η közös eloszlásával.

Vezessük be a következő jelölést:

$$f(y, z) = \frac{y}{z^{3/2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} (2\nu+1) e^{-\frac{1}{2} (2\nu+1)^2 \frac{y^2}{z}}.$$

4. tétel. Ha $F(x) \equiv G(x)$, akkor $-0 \leq z \leq 1-re$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{n}{2}} \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - G_n(x)| < y, \frac{1}{2} (F_n(\eta_0^{(n)} + 0) + G_n(\eta_0^{(n)} + 0)) < z \right\} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^y \int_0^z f(u, v) f(u, 1-v) du dv, & \text{ha } y > 0, \\ 0, & \text{ha } y \leq 0. \end{cases}$$

z szerinti integráció 0-tól 1-ig az abszolút eltérésre vonatkozó KOLMOGOROV—SZMIRNOV-féle eloszláshoz vezet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{n}{2}} \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - G_n(x)| < y \right\} = \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} e^{-2\nu^2 y^2}, & \text{ha } y > 0 \\ 0, & \text{ha } y \leq 0. \end{cases}$$

5. tétel. Ha $F(x) \equiv G_n(x)$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - G_n(x))}{\frac{1}{2} (F_n(\xi_0^{(n)} + 0) + G_n(\xi_0^{(n)} + 0))} < c \right\} =$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{\sqrt[4]{8}} \int_0^c e^{\frac{t^4}{4}} W_{-\frac{7}{4}, \frac{1}{4}} \left(\frac{t^2}{2} \right) dt, & \text{ha } c > 0, \\ 0, & \text{ha } c \leq 0, \end{cases}$$

ahol W az ún. Whittaker-féle függvényt jelenti:

$$W_{\lambda, \mu}(z) = \frac{z^{\mu + \frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma(\mu - \lambda + \frac{1}{2})} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\mu - \lambda - \frac{1}{2}} (1+t)^{\mu + \lambda - \frac{1}{2}} dt,$$

ha

$$\Re(\mu - \lambda) > -\frac{1}{2}, \quad |\arg z| < \pi.$$

ДВУМЕРНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В ТЕОРИИ ВАРИАЦИОННЫХ РЯДОВ

I. VINCZE

Резюме

В литературе известен ряд критериев для того, чтобы определить происходят ли два образца из тождественного распределения. Эти пробы часто недостаточно чувствительны в отношении некоторых контргипотез. Естественно построение таких статистических критериев, которые основываются на двух (или больше) хорошо выбранных статистических функций элементов образца. В настоящей работе доказывается несколько теорем о распределении и предельном распределении двух переменных, которые годятся для построения таких критериев. Несколько дальнейших теорем о предельном распределении, связи с известными теоремами о предельном распределении и таблицы, нужные для применения проб — в случае образцов с одинаковым числом элементов —, автор собирается опубликовать в дальнейшем.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ суть n -элементные образцы, взятые из случайных величин ξ и η с функцией распределения $F(x)$ и $G(x)$. Пусть $F_n(x)$ и $G_n(x)$ обозначают соответствующие эмпирические функции распределения. Пусть, наконец, $\xi_n^{(n)}$ и $\eta_n^{(n)}$ суть те „первые“ места, где функции $(F_n(x) - G_n(x))$ и $|F_n(x) - G_n(x)|$ принимают своё наибольшее значение, т. е. нижние границы мест максимума. Имеют место следующие теоремы.

Теорема I. Если $F(x) \equiv G(x)$, то

$$P \left\{ \sup_{-\infty < x < +\infty} (F_n(x) - G_n(x)) = \frac{k}{n}, \quad \frac{1}{2} (F_n(\xi_n^{(n)} + 0) + G_n(\xi_n^{(n)} + 0)) = \frac{r}{2n} \right\} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{если } k < 0 \text{ или } k+r \text{ нечётно} \\ \frac{1}{(r-1)(2n-r+2)} \cdot \frac{\left(\frac{r}{2}\right) \left(n - \frac{r}{2}\right)}{\binom{2n}{n}}, & \text{если } k=0, \quad r=2, 4, \dots \\ \frac{k(k+1)}{r(2n-r+1)} \cdot \frac{\left(\frac{r+k}{2}\right) \left(n - \frac{r+k}{2}\right)}{\binom{2n}{n}}, & \text{если } k=1, 2, \dots, n, \\ & r=k, k+2, \dots, 2n-k. \end{cases}$$

Так как граничное распределение этого распределения есть конечное распределение Гнеденко—Королюка [7], относящееся к одностороннему отклонению, то мы нашли теоретико-вероятностное доказательство следу-

ЮЩИХ ТОЖДЕСТВ:

$$\sum_{(r)}^* \frac{k(k+1)}{r(2n-r+1)} \binom{r}{\frac{r+k}{2}} \binom{2n-r+1}{n-\frac{r+k}{2}} = \frac{2k+1}{n+k+1} \binom{2n}{n-k}$$

где суммирование происходит для $r = k, k+2, \dots, 2n-k$ и $1 \leq k \leq n$.
Для случая $k=0$

$$\sum_{(r)}^* \frac{1}{(r-1)(2n-r+2)} \binom{r}{\frac{r}{2}} \binom{2n-r}{n-\frac{r}{2}} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

где суммирования производится для $r = 2, 4, 6, \dots$

Введём следующее обозначение:

$$A_r^{(k)} = \sum_{v=0}^{\left[\frac{r}{2n}\right]} (-1)^v \binom{r}{\frac{r+k}{2} + vk} \frac{(2v+1)k}{r}.$$

Теорема 2. Если $F(x) \equiv G(x)$, то

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - G_n(x)| = \frac{k}{n}, \quad \frac{1}{2}(F_n(\eta_0^{(n)} + 0) + G_n(\eta_0^{(n)} + 0)) = \frac{r}{2n} \right\} =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{если } k < 0 \text{ или } k+r \text{ нечётно,} \\ \frac{2A_r^{(k)} A_{2k-r+1}^{(k-1)}}{\binom{2n}{r}}, & \text{если } k = 1, 2, \dots, n; r = k, k+2, \dots, 2n-k. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 1 основывается на двух простых комбинаторных леммах, в то время, как доказательство теоремы 2 сводится к задаче блуждания.

Из приведённых теорем распределения получатся соответствующие теоремы предельного распределения, если с увеличением стремится к бесконечности как n , а $k \sim \sqrt{n}$, то есть

$$k \sim \sqrt{2n} y \quad r \sim 2nz$$

Теорема 3. Если $F(x) \equiv G(x)$, то для $0 \leq z \leq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \sqrt{\frac{n}{2}} \sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - G_n(x)) < y, \quad \frac{1}{2}(F_n(\xi_0^{(n)} + 0) + G_n(\xi_0^{(n)} + 0)) < z \right\} =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^y \int_0^z \frac{u^2}{(v(1-v))^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{u^2}{v(1-v)}} du dv, & \text{если } y < 0 \\ 0, & \text{если } y \geq 0. \end{cases}$$

Граничное распределение этого распределения есть распределение Смирнова [14], т. е., интегрируя по z , получаем:

$$\lim \mathbf{P} \left\{ \left| \sqrt{\frac{n}{2}} \sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - G_n(x)) \right| < y \right\} = \begin{cases} 1 - e^{-2y^2}, & \text{если } y > 0 \\ 0, & \text{если } y \leq 0. \end{cases}$$

Если интегрировать по y от 0 до ∞ , то получается равномерное распределение, откуда следует, что граничное распределение переменного $\xi_0^{(n)}$ совпадает с общим распределением ξ и η .

Введём следующее обозначение:

$$f(x, y) = \frac{y}{z^{3/2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} (2\nu+1) e^{-\frac{1}{2} (2\nu+1)^2 \frac{y^2}{z}}.$$

Теорема 4. Если $F(x) \equiv G(x)$, то для $0 \leq z \leq 1$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \sqrt{\frac{n}{2}} \sup_{-\infty < x < \infty} |(F_n(x) - G_n(x))| < y, \frac{1}{2} (F_n(\eta_0^{(n)} + 0) + G_n(\eta_0^{(n)} + 0)) < z \right\} = \right. \\ \left. = \begin{cases} \int_0^y \int_0^z \frac{8}{\pi} f(u, v) f(u, 1-v) du dv, & \text{если } y > 0 \\ 0, & \text{если } y \leq 0. \end{cases} \right. \end{aligned}$$

Интегрирование по z от 0 до 1 приводит к распределению Колмогорова—Смирнова относящемуся к абсолютному отклонению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \sqrt{\frac{n}{2}} \sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - G_n(x)| < y \right\} = \begin{cases} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^{\nu} e^{-2\nu^2 y^2}, & \text{если } y > 0 \\ 0, & \text{если } y \leq 0. \end{cases}$$

Теорема 5. Если $F(x) \equiv G(x)$, то

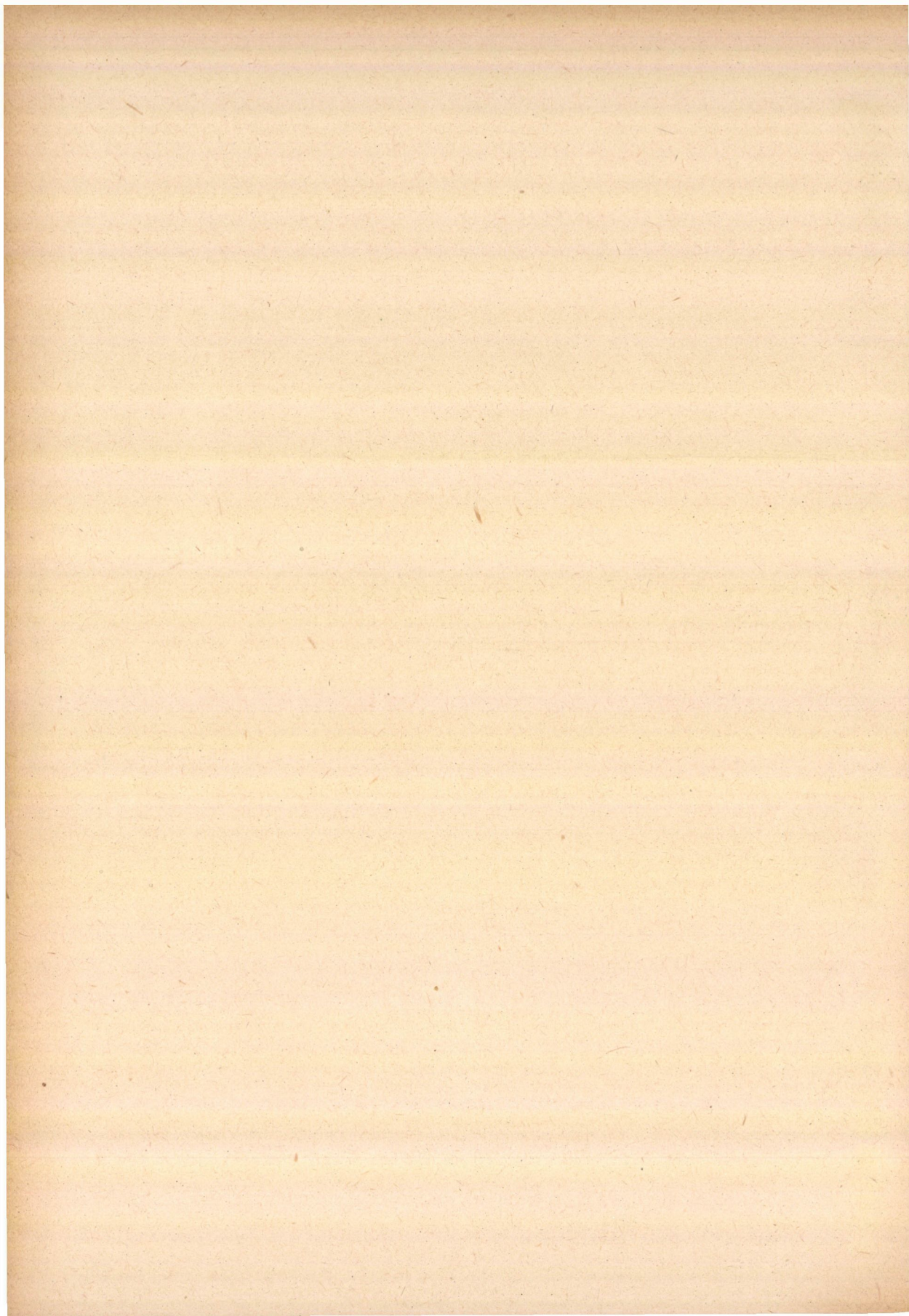
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - G_n(x))}{\frac{1}{2} (F_n(\xi_0^{(n)} + 0) + G_n(\xi_0^{(n)} + 0))} < c \right\} = \right. \\ \left. = \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{8}} \int_0^c \sqrt{t} e^{-\frac{t^2}{4}} W_{-\frac{7}{4}, \frac{1}{4}} \left(\frac{t^2}{2} \right) dt & \text{если } c > 0 \\ 0, & \text{если } c \leq 0, \end{cases} \right. \end{aligned}$$

где W обозначает так называемую функцию Whittaker:

$$W_{\lambda, \mu}(z) = \frac{z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma(\mu-\lambda+\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{\mu-\lambda-\frac{1}{2}} (1+t)^{\mu+\lambda-\frac{1}{2}} dt$$

если

$$\Re(\mu - \lambda) > -\frac{1}{2}, \quad |\arg z| < \pi.$$



KÉTPÓLUSÚ ELEKTROMOS HÁLÓZATOKRÓL, I.

ADÁM ANDRÁS

Bevezetés

Két pontot összekötő elektromos hálózatok¹⁾ szerkezeti vizsgálatánál két nagy osztályt szokás elkülöníteni: azoknak a hálózatoknak az osztályát, amelyek előállíthatók a legegyszerűbb (egyetlen élből álló) kétpólusú hálózatból soros és párhuzamos kapcsolások ismételt alkalmazása által; valamint azokat, amelyek ilyen előállítással nem rendelkeznek. Az utóbbi típusú hálózatra legkézenfekvőbb példa a Wheatstone-féle híd, ezért e típus a „hidas hálózatok” összefoglaló elnevezéssel is ismeretes. Látjuk, hogy a hidas hálózatok ilyen értelmezése negatív definíció, melynek (formálisan) semmi köze valamilyen „hid” fellépéséhez a hálózatban. Célunk a hidas hálózatoknak ezt az értelmezését pozitívrá váltani: megmutatni, hogy pontosan a hidas hálózatokban csatlakoznak alkalmas utak úgy egymáshoz, mint a Wheatstone-hídban az élek.

Matematikailag egy kétpólusú hálózat egy véges gráfot jelent (többszörös éleket is megengedve, kizárva a hurkokat²⁾), mely bizonyos feltételeknek elegendő tesz. Mégpedig: minthogy számunkra csak az fontos, a gráf hogyan köti össze a két kitüntetett pontját, feltételezzük, hogy nem tartalmaz a gráf izolált pontokat, sem olyan éleket, amelyeken a két kitüntetett pont közötti egyetlen út sem halad át. E feltételnek az 1. §-ban adjuk két ekvivalens változatát. Fő eredményeinket a 2. §-ban érjük el és annak 4. tételébe sűrítjük össze.³⁾

¹⁾ Vizsgálatainkban megengedett (de közömbös), hogy egy hálózat egy éle ne pusztán huzalt jelentsen, hanem tetszőleges olyan kétpólusú alkatrészt, amely (legalább működése bizonyos fázisában) vezető összeköttetést hoz létre a két pólusa között (pl. jelfogó tekercse, jelfogó érintkezője, elektroncső anód-áramköre).

²⁾ Hurok: olyan él, amelynek kezdőpontja és végpontja ugyanaz a pont. Többszörös élen itt azt értettük, hogy ugyanazt a pontpárt egynél több él is összekötheti. A később bevezetésre kerülő „kettős él” más természetű fogalom lesz.

³⁾ Menger gráfelméleti tételéből (lásd pl. [1], 244. oldal) következik, hogy egy irreducibilis gráfban van két egymástól idegen pálya. E tény ismeretében a 2. tétel bizonyításának csak az 1. esetére van szükség, és lehetőség nyílik a 4. tétel ciklikus bizonyítására. (A $\gamma \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ bizonyítási lánc lezárható az $\alpha \rightarrow \gamma$ lépéssel.) A dolgozatunkban szereplő bizonyítások lényegesen egyszerűbbek, mint a Menger-féle tételt igazoló gondolatmenet. A. G. Lunc kimondja kandidátusi disszertációjában ([3], 6. oldal) a 4. tételben szereplő α és β tulajdonságok ekvivalenciáját, bizonyítását azonban tudomásom szerint nem publikálta. (Megjegyzés az első korrigáláskor, 1958. V. 6-án.)

1. §. Elnevezések, jelölések

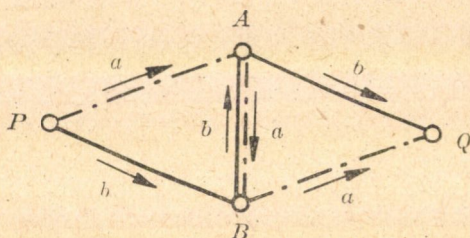
Gráfon mindig véges sok pontot és élt tartalmazó gráfot értünk. A \mathfrak{G} gráf pontjainak és éleinek egy

$$A_0, e_1, A_1, e_2, A_2, e_3, A_3, \dots, A_{n-1}, e_n, A_n \quad (n \geq 0)$$

sorozatát *útnak* nevezzük, ha egyetlen pont sem szerepel kétszer a sorozatban, és bármely i -re ($1 \leq i \leq n$) az e_i él az A_{i-1} és A_i pontokat köti össze.⁴⁾ Ha egy út csupán egy pontból áll, akkor *elfajult útról* beszélünk.

Az utakat kis latin betűkkel fogjuk jelölni, szükség esetén a kezdőpontot és végpontot zárójelben kiírva: $a(PQ)$. Ha az a útnak A és B (ily sorrendben!) pontjai, akkor $a[AB]$ jelentse az a útnak A és B közötti részét. Az ellenkező irányú utat (-1) -ik hatványként jelöljük: pl. $a^{-1}(QP)$, $a^{-1}[BA]$.

Ha az $a(AB)$ és $b(BC)$ utaknak B -n kívül közös pontjuk nincs, akkor $a \cdot b$ jelentse azt az utat, amely először a pontjaiból és éleiből, ezek után b pontjaiból és éleiből áll (megtartva azok sorrendjét), de B -t csak egyszer tartalmazza.



1. ábra

Egy út bármely oly pontját, amely az út kezdőpontjától és végpontjától különbözik, az út *belső pontjának* nevezzük. Két utat egymástól *idegeneknek* nevezünk, ha nincs közös élük, sem olyan közös pontjuk, amely legalább egyiküknek belső pontja.⁵⁾

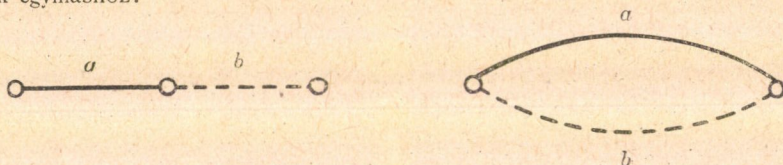
Minden vizsgált gráfban ki fogunk tüntetni egy pontot, mint a gráf *kezdőpontját*, és egy attól különböző pontot mint a gráf *végpontját*. A P és Q betűket e kezdőpontok illetve végpontok jelölésére tartjuk fenn. Ha egy gráfban valamely útnak kezdőpontja a gráf kezdőpontja, végpontja pedig a gráf végpontja, akkor ezt az utat *pályának* nevezzük. Egy $c(AB)$ nem elfajult utat *kettős útnak* fogunk nevezni, ha vannak olyan a és b pályák, melyekre $c = a[AB]$ és $c^{-1} = b[BA]$ (1. ábra.).

Speciális esetként adódik a *kettős él* fogalma. Nyilvánvaló, hogy egy gráf akkor és csak akkor tartalmaz kettős élt, ha tartalmaz kettős utat.

Ha egy \mathfrak{G} gráfban az $a(AB)$, $b(PC)$, $c(CA)$, $d(CB)$, $e(AD)$, $f(BD)$ és $g(DQ)$ utak (2. ábra) egymástól páronként idegenek, közülük legfeljebb b és g elfajultak, továbbá a P, A, B, C, D, Q pontok az esetleges $P=C$ vagy $Q=D$ egybeeséstől eltekintve páronként különbözőek, akkor azt mondjuk, hogy \mathfrak{G} -nek ezek az útjai a Wheatstone-híd módján csatlakoznak egymáshoz.

⁴⁾ Az éleket eleve nem irányítjuk, mikor azonban elnevezünk egy élt, akkor valamilyen irányításban tekintjük. Az A, e, B út és az e él között nem teszünk különbséget.

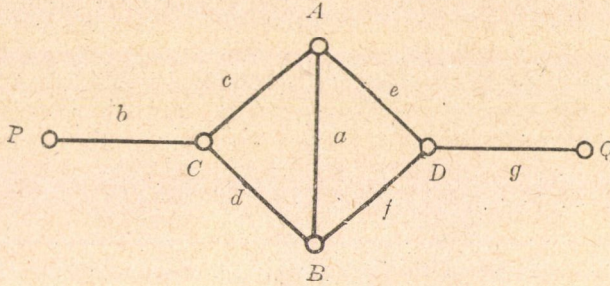
⁵⁾ Nem áll tehát ellentétben két út idegenségével, ha az alábbi módok egyikén csatlakoznak egymáshoz:



Egy gráfot nevezzünk T_1 tulajdonságúnak, ha a gráf bármely A pontjához van olyan pálya, amely átmegy A -n.

Egy gráfot nevezzünk T_2 tulajdonságúnak, ha bármely pontjából kiindul legalább egy él, továbbá bármely e éléhez van olyan pálya, amely átmegy e -n (azaz: amelynek vágy e , vagy pedig e^{-1} része).⁶⁾

1. tétel. Egy gráf akkor és csak akkor T_1 tulajdonságú, ha egyszeres-mind T_2 tulajdonságú is.

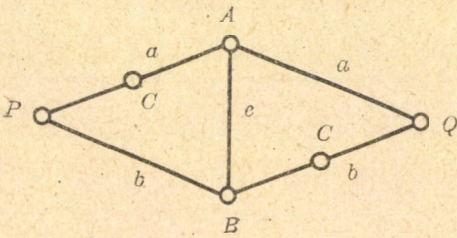


2. ábra

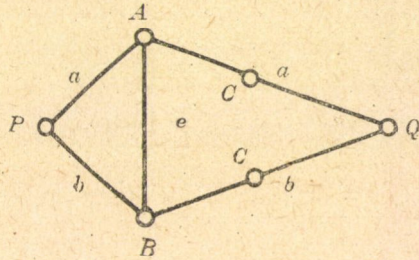
Bizonyítás. Világos, hogy egy T_2 tulajdonságú gráf rendelkezik a T_1 tulajdonsággal is. Megfordítva, legyen a \mathcal{G} gráf T_1 tulajdonságú. A T_2 tulajdonság két kikötése közül csak a második szorul bizonyításra. Legyen $e(AB)$ tetszőleges él \mathcal{G} -nek; legyen a olyan pálya, amely A -n átmegy, és legyen b olyan pálya, amely B -n átmegy. A bizonyítás további részében három esetet különböztetünk meg, ezek egyike két alesetre esik szét.

1. eset. Az a pálya átmegy B -n. Aszerint, hogy az A és B pontok közül melyik fordul elő előbb az a pályán, létezik vagy az $a[PA] \cdot e \cdot a[BQ]$ pálya, vagy pedig az $a[PB] \cdot e^{-1} \cdot a[AQ]$ pálya.

2. eset. A b pálya átmegy A -n. Ez az eset az előzővel megegyező módon vizsgálható.



3. ábra



4. ábra

3. eset. Az a pálya nem megy át a B ponton, és a b pálya nem megy át az A ponton:

3/a. eset. Az $a[PA]$ út idegen a $b[BQ]$ úttól. Ekkor létezik az $a[PA] \cdot e \cdot b[BQ]$ pálya.

3/b. eset. Az $a[PA]$ út nem idegen a $b[BQ]$ úttól. Jelöljük a $b[BQ]$ út első olyan pontját C -vel, amely a -nak is pontja (nem feltétlenül $a[PA]$ -nak).

⁶⁾ Az ilyen tulajdonságú gráfot TRAHTENBROT [2] dolgozatában erősen összefüggőnek nevezi.

Nyilván $C \neq A$. Aszerint, hogy C az $a[PA]$ útnak pontja-e vagy az $a[AQ]$ útnak, létezik az

$$a[PC] \cdot b^{-1}[CB] \cdot e^{-1} \cdot a[AQ]$$

pálya (3. ábra), illetve az

$$a[PA] \cdot e \cdot b[BC] \cdot a[CQ]$$

pálya (4. ábra)⁷⁾. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

A továbbiakban csak olyan gráfokkal foglalkozunk, amelyek rendelkeznek a T_1 és T_2 tulajdonságokkal.

2. §. Eredmények

Legyen adva két egymástól idegen gráf: \mathcal{G}_1 és \mathcal{G}_2 . Kezdőpontjaik legyenek P_1 és P_2 , végpontjaik: Q_1 és Q_2 . A két gráf soros kapcsolásán értsük új gráf előállítását a $Q_1 = P_2$ azonosítással; az így előálló gráf kezdőpontja legyen P_1 , végpontja Q_2 . A két gráf párhuzamos kapcsolása jelentse új gráf előállítását a $P_1 = P_2$ kezdőponttal, $Q_1 = Q_2$ végponttal. TRAHTENBROT [2] dolgozatának 3. tételéből következik, hogy egy \mathcal{G} gráf lényegében egyértelműen állítható elő sorbakapcsolások és párhuzamos kapcsolások véges sokszori alkalmazásával oly gráfokból, amelyek mindegyike irreducibilis mind a soros, mind a párhuzamos kapcsolásra nézve.⁸⁾ A következőkben röviden *irreducibilisnek* nevezünk egy gráfot, ha mind sorosan, mind párhuzamosan irreducibilis. Az említett gráfokat a \mathcal{G} gráf *irreducibilis alkatrészeinek* nevezük. A legegyszerűbb irreducibilis alapelem: $P \circ \dots \circ Q$. Könnyen belátható, hogy egy kettőnél több pontból álló irreducibilis \mathcal{G} gráfban

α) P és Q között nincs él,

β) \mathcal{G} bármely pontpárja között van olyan út, amely sem P -t, sem Q -t nem tartalmazza belső pontjaként,

γ) \mathcal{G} bármely (P -től és Q -től különböző) pontjához van olyan pálya, amely azon a ponton nem megy át.⁹⁾

⁷⁾ Ábráinkban — ha az áttekinthetőség érdekében szükséges — ugyanazt a pontot két példányban ábrázoljuk.

⁸⁾ Ez a tény közvetlenül is belátható. — „Lényegileg egyértelműen“ azt jelenti, hogy a párhuzamosan kapcsolt komponensek sorrendjétől, valamint a sorosan és párhuzamosan kapcsolt komponensek csoportosításától eltekintve. — Egy gráfot irreducibilisnek nevezünk a soros, illetve párhuzamos kapcsolásra nézve, ha nem állítható elő más (egyszerűbb) gráfokból soros, illetve párhuzamos kapcsolással.

⁹⁾ E három tulajdonságot a következő megfontolások igazolják:

α) Ellenkező esetben az él párhuzamos kapcsolással leválasztható lenne.

β) Legyen ugyanis $A (\neq P, Q)$ pontja \mathcal{G} -nek. Tekintsük azokat a pontokat, amelyek A -val összeköthetőek sem P -t, sem Q -t nem tartalmazó úttal. Ezek a pontok, továbbá az őket egymással, P -vel és Q -val összekötő élek olyan \mathcal{G}' gráfot alkotnak, amely — amennyiben β) nem teljesül, tehát $\mathcal{G}' \neq \mathcal{G}$ — párhuzamos kapcsolással leválasztható \mathcal{G} -ről.

γ) Legyen ugyanis A olyan pont, amelyen bármely pálya átmegy. Belátható, hogy ha van valamely B ponthoz olyan pálya, amelyen B megelőzi A -t, akkor nincs olyan pálya, amelyen A megelőzi B -t; tehát beszélhetünk \mathcal{G} -nek A -t megelőző, és A -t követő pontjairól. \mathcal{G} szétesik két szorosan kapcsolt komponensre, amelyek egyike az A előtti pontokat, másika az A utáni pontokat (továbbá a megfelelő éleket, valamint A egy-egy példányát) tartalmazza.

Megjegyezzük, hogy a következőzéseinkhez szükséges állításon túlmenően az α) és β) tulajdonságok együtt ekvivalensek a gráf párhuzamos irreducibilitásával, a γ) tulajdonság pedig a gráf soros irreducibilitásával.

2. tétel. Ha \mathcal{G} kettőnél több pontból álló irreducibilis gráf, akkor \mathcal{G} -ben van kettős út.

Bizonyítás. Legyen \mathcal{G} tetszőleges pályája a , ennek pontjai:

$$A_0 = P, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n = Q \quad (n \geq 2).$$

Bármely i -re ($1 \leq i \leq n-1$) legyen α_i azoknak a pályáknak a halmaza, amelyek az A_1, A_2, \dots, A_i pontok egyikén sem mennek át. α_1 nem üres.

1. eset. α_{n-1} nem üres halmaz. Ekkor van a -tól idegen b pálya. Legyenek A és B tetszőleges belső pontjai a -nak, illetve b -nek, $c(AB)$ pedig legyen valamely P -n és Q -n át nem menő út. D legyen $c(AB)$ első oly pontja, amely pontja a b pályának is. E legyen $c(AD)$ utolsó oly pontja, amely pontja az a pályának is. Ekkor léteznek az

$$a[PE] \cdot c[ED] \cdot b[DQ]$$

$$\text{és} \quad b[PD] \cdot c^{-1}[DE] \cdot a[EQ]$$

pályák, tehát $c[ED]$ kettős út (5. ábra).

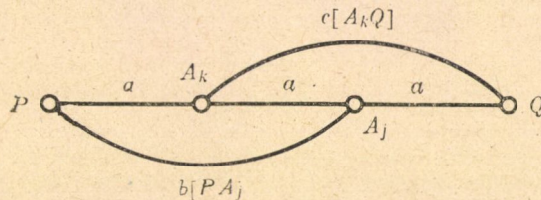
2. eset. Van olyan j ($2 \leq j \leq n-1$), hogy α_{j-1} nem üres halmaz, de α_j igen. Legyen $b \in \alpha_{j-1}$, ekkor A_j pontja b -nek. Legyen c olyan pálya, amely nem megy át A_j -n, legyen A_k ($1 \leq k \leq j-1$) c utolsó olyan pontja, amely pontja $a[PA_j]$ -nek is. Ekkor a $b[PA_j]$ és $c[A_kQ]$ utak idegenek egymástól. (Ellenkező esetben legyen B az első olyan pontja $b[PA_j]$ -nek, amely pontja $c[A_kQ]$ -nak is; a $b[PB] \cdot c[BQ]$ pálya létezése ellentmond α_j ürességének.) Így létezik a

$$b[PA_j] \cdot a^{-1}[A_jA_k] \cdot c[A_kQ]$$

pálya, tehát $a[A_kA_j]$ kettős út (6. ábra).

3. tétel. Ha a \mathcal{G} gráfban az $a_1(A_1B_1)$ út kettős út, akkor \mathcal{G} tartalmaz olyan a, b, c, d, e, f, g utakat, amelyek a Wheatstone-híd módján csatlakoznak egymáshoz, és a_1 része a -nak vagy a^{-1} -nek.

Bizonyítás. Van olyan $a(AB)$ kettős út, amelynek a_1 része, és amely nem valódi része egyetlen kettős útnak sem. Vannak oly k és l pályák, hogy $k[AB] = a$ és $l[BA] = a^{-1}$. Legyen C az utolsó olyan pontja $l[PB]$ -nek,



6. ábra

amely $k[PA]$ -nak is pontja. Legyen D az első olyan pontja $l[AQ]$ -nak, amely $k[BQ]$ -nak is pontja. Ekkor az $a, b = k[PC], c = k[CA], d = l[CB], e = l[AD], f = k[BD], g = k[DQ]$ utak (7. ábra) a tétel csaknem valamennyi állítását értelmezésük folytán kielégítik, csupán két állítás szorul még bizonyításra. $l[AD]$ idegen $k[PA]$ -tól;

az ellenkező esetben ugyanis legyen F az első olyan belső pontja $l[AD]$ -nek, amely $k[PA]$ -nak is pontja; a $k[PF] \cdot l^{-1}[FB] \cdot k[BQ]$ pálya létezik, ezért a (nyilván a -nál bővebb) $l[BF]$ út kettős út, ellentétben a maximalitásával.

Ugyanígy bizonyítható, hogy $l[CB]$ idegen $k[BQ]$ -től: az ellenkezőt feltételezve, ha $l[CB]$ -nek az utolsó olyan belső pontját, amely $k[BQ]$ -val közös, G -vel jelöljük, létezik a $k[PA] \cdot l^{-1}[AG] \cdot k[GQ]$ pálya, így $l[GA]$ kettős út. Ezzel az ellentmondással teljesen igazoltuk a 3. tételt.

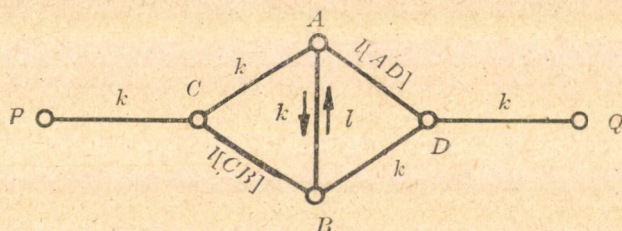
Vizsgálatainknak a 2. és 3. tételekben elért fő eredményeit a következő állításban foglalhatjuk össze:

4. tétel. Egy \mathcal{G} gráfra vonatkozóan ekvivalens a következő három tulajdonság:

α) \mathcal{G} nem állítható elő a $P \circ \text{---} \circ Q$ alapelemből soros és párhuzamos kapcsolások alkalmazásával,

β) \mathcal{G} tartalmaz kettős utat,

γ) \mathcal{G} tartalmaz oly utakat, melyek a Wheatstone-híd módján csatlakoznak egymáshoz.



7. ábra

Bizonyítás. Indukcióval könnyű belátnunk, hogy egy gráf kettős utat akkor és csak akkor tartalmaz, ha legalább egy irreducibilis alkatrésze tartalmaz kettős utat. Ezért β -ból következik α) és 2. tétel alapján α -ból következik β). A 3. tétel szerint β) teljesülése maga vonja γ) teljesülését. Az, hogy γ -ból következik β), nyilvánvaló a $bcafg$ és $bda^{-1}eg$ pályák létezéséből. (a, b, c, d, e, f, g a Wheatstone-híd módján csatlakozó utakat jelentik.)

Befejezésül megjegyezzük, hogy a gráf végességét előíró kikötésből csupán a pontok végességének megkövetelése lényeges. Eredményeink érvényesek végtelen sok élt, véges sok pontot tartalmazó gráfokra is, ha az egy-élű gráf végtelen sok példányának párhuzamos kapcsolását is megengedjük.

Hálás köszönetet mondok KALMÁR LÁSZLÓ professzornak, aki e tárgykörre figyelmemet felhívta, munkámat érdeklődéssel és tanácsokkal kísért.

(Beérkezett: 1957. VII. 5.)

IRODALOM

- [1] KÖNIG, D.: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936.
- [2] Трахтенброт, Б.: „Синтез бесповторных схем“. Доклады Академии Наук СССР **103** (1955) 973—976.
- [3] Лунц, А. Г.: *Теория многополиников*. Ленинград, 1951. (Kandidátusi disszertáció autoreferátuma.)

О ДВУХПОЛЮСНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ, I.

A. ÁDÁM

Резюме

Под графом всегда понимается граф, содержащий конечное число точек и ребер. Две точки графа могут быть связаны и несколькими ребрами. Концы ребер — различные точки.

Последовательность

$$A_0, e_1, A_1, e_2, A_2, \dots, A_{n-1}, e_n, A_n \quad (n \geq 1)$$

называется (невырожденным) путём, если её точки попарно различны и ребро e_i при всяком i связывает точки A_{i-1} и A_i .

В каждом графе есть начальная точка и (отличающаяся от неё) конечная точка. Путь называется цепью, если её начальная точка есть начальная точка графа, а её конечная точка — конечная точка графа. Путь называется двойным путём, если существуют две цепи, которые пробегают его в различных направлениях.

От исследуемых графов требуется, чтобы через каждую их точку проходила цепь. Определяется последовательное и параллельное соединение графов. Известно, что всякий граф может быть единственным образом представлен (относительно этих двух методов соединения) из неприводимых графов. Самый простой неприводимый граф содержит единственное ребро между начальной и конечной точкой: $P \circ \text{---} \circ Q$.

Пути a, b, c, d, e, f и g примыкают друг к другу подобно как в мосте Wheatstone-a, если связаны так, как это показано на рис. 3. (P начальная, а Q конечная точка графа. Пути попарно не имеют общих граней и не имеют общих точек, кроме указанных на рисунке. Пути b и g могут отсутствовать.)

Теорема 2. В неприводимом графе, содержащем по крайней мере 3 точки, есть двойной путь.

Теорема 3. К любому двойному пути графа найдутся такие пути, которые примыкают друг к другу подобно как в мосте Wheatstone-a, и имеемый в виду двойной путь есть часть пути a .

Теорема 4. Относительно графа эквивалентны следующие три свойства:

α) Граф не может быть представлен из элементов $P \circ \text{---} \circ Q$ последовательным и параллельным соединением.

β) Граф содержит двойной путь.

γ) Граф содержит пути, которые примыкают друг к другу подобно как в мосте Wheatstone-a.

ÜBER ZWEIPOLIGE ELEKTRISCHE NETZE, I.

A. ÁDÁM

Zusammenfassung

Unter einem Graphen verstehen wir im folgenden immer einen Graphen mit endlich vielen Punkten und Kanten. Zwei Punkte des Graphen können auch von mehreren Kanten verbunden werden. Die beiden Endpunkte einer Kante sind verschiedene Punkte.

Eine Folge

$$A_1, e_1, A_1, e_2, A_2, \dots, A_{n-1}, e_n, A_n \quad (n \geq 1)$$

wird ein (nicht degenerierter) *Weg* des Graphen genannt, wenn ihre Punkte paarweise verschieden sind, und die Kante e_i für jedes i die Punkte A_{i-1} und A_i verbindet.

Wir zeichnen in jedem Graphen einen Punkt aus, der der *Anfangspunkt* des Graphen genannt wird und einen (vom vorhergehenden verschiedenen) Punkt, der der *Schlusspunkt* des Graphes genannt wird. Ein Weg wird eine *Bahn* genannt, wenn sein Anfangspunkt der Anfangspunkt des Graphen, und sein Schlusspunkt der Schlusspunkt des Graphen ist. Ein Weg ist ein *doppelter Weg*, wenn zwei passende Bahnen existieren, so dass der Weg in beiden Richtungen von diesen Bahnen durchlaufen wird.

Von den betrachteten Graphen wird gefordert, dass durch jeden ihrer Punkte eine Bahn durchgehe. Wir definieren die Reihenschaltung und die Parallelschaltung zweier Graphen. Es ist bekannt, dass sich jeder Graph durch (für diese beiden Schaltungsmethoden) irreduzible Graphen eindeutig darstellen lässt. Der einfachste irreduzible Graph enthält eine einzige Kante zwischen seinem Anfangspunkt und Schlusspunkt: $P \circ \text{---} \circ Q$.

Die Wege a, b, c, d, e, f und g schliessen sich zu einander wie eine *Wheatstonesche Brücke* an, wenn sie auf solche Art zusammenhangen, wie man an der Abbildung 3. sehen kann. (P ist der Anfangspunkt, Q der Schlusspunkt des Graphen. Die Wege sollen paarweise keine gemeinsame Kante, und keinen anderen gemeinsamen Punkt enthalten, als an der Abbildung sichtbar ist. Die Wege b und g mögen verschwinden.)

Satz 2. Ein irreduzibler Graph mit mindestens drei Punkten enthält einen doppelten Weg.

Satz 3. Für jeden doppelten Weg eines Graphen gibt es Wege, die sich zu einander wie eine *Wheatstonesche Brücke* verhalten, und der betrachtete doppelte Weg ist im Wege a enthalten.

Satz 4. Die folgenden drei Eigenschaften sind äquivalent für einen Graphen:

- α) Der Graph lässt sich nicht aus dem Grundelement $P \circ \text{---} \circ Q$ durch Reihen- und Parallelschaltungen darstellen;
- β) Der Graph enthält einen doppelten Weg;
- γ) Der Graph enthält Wege, die sich wie eine *Wheatstonesche Brücke* zu einander anschliessen.

**PARADICSOMSÚRÍTMÉNYEK
MIKROBIOLÓGIAI ELLENŐRZÉSÉNÉL FELLEPŐ
STATISZTIKAI PROBLÉMÁKRÓL**

ÉLTETŐ ÖDÖN és SARKADI KÁROLY

A Konzerv-, Hús- és Hűtőipari Kutató Intézet kérésére foglalkoztunk a következő problémával.

Paradicsomsűrítmények átvételi minőségellenőrzése úgy történik, hogy a tétel valamelyik dobozából vesznek egy mintát; ezt szabvány szerint hígítják, majd belőle néhány cseppet kivéve, mikroszkóppal megvizsgálják, hogy 50—100 mikroszkópi látótér közül hányban található penészfonál. A penészfonalas, azaz pozitív részek százalékos számaránya a minta ún. Howard-száma. Ha ez a Howard-szám egy bizonyos korlátnál nagyobb, akkor visszautasítják az egész tételt, ha kisebb, akkor átveszik. Külföldi átvételnél a szereplő korlát 40. A kérdés az, hogy milyen korlátot kell megadni hazai előzetes ellenőrzésnél a Howard-számra ahhoz, hogy megfelelő minőségű tételek kerüljenek exportra, továbbá hogyan módosul ez a hazai átvételi korlát, ha tételenként nem egy, hanem két vagy esetleg több előzetes vizsgálat történik.

A problémát több szempontból és különböző módokon lehet tárgyalni, azonban mindegyiknél több-kevesebb egyszerűsítő feltételezéssel kell élnünk. Feltesszük, hogy a megvizsgált látóterek száma rögzített (a gyakorlatban rendszerint 100 látóteret vizsgálnak meg). Ha a látóterek pozitív vagy negatív volta egymástól független lenne, akkor a mintában talált Howard-szám binomiális eloszlású lenne. Azonban egyrészt a penészfonalak nem egyenletesen elszórva jelentkeznek, hanem kisebb-nagyobb csomókban, másrészt egy-egy penészfonál esetleg nem csak egy látótérben észlelhető, hanem átnyúlhat két-három szomszédos látótérbe is. Ily módon a szomszédos látóterek nem függetlenek egymástól, az eloszlás nem lesz binomiális, ami a fenti okok folytán elsősorban pl. abban jelentkezik, hogy a tapasztalati szórás elég jelentősen nagyobb, mint a megfelelő binomiálisnál lenne. A tárgyalás során ezért feltesszük, hogy a Howard-számok eloszlására a normális eloszlás a megfelelő közelítés. E feltételezést a tapasztalat is megerősíti. A megbízó intézet ugyanis előzőleg több tételre vonatkozóan 500—500 mérésből álló részletes vizsgálatot végzett, s a nyert tapasztalati eloszlások általában elég jó egyezést mutattak a normális eloszlással. Feltesszük továbbá, hogy a Howard-szám szórása független a várható értéktől, s ennek folytán a szórás állandónak és a tapasztalati adatokból ismertnek tekintjük. Ez a feltételezés csak bizonyos határok között nem jelent nagy eltérést a valóságtól. Ha a vizs-

gálakra kerülő tételek Howard-számának várható értékei között nagy eltérések vannak, akkor az állandó szórással való számolás lényeges hibát okozhat. Ezt a hibát az [1] 7.3. pontja szerint végzett homoscedasztikus transzformációval küszöbölhetjük ki. A transzformációt a megbízó intézet részletes vizsgálataiból nyert adatok alapján az alább példaként ismertetett konkrét esetben elvégeztük.

A probléma megoldására lényegében három módszer kínálkozik.

1. Az első tárgyalásmódnál még azt a további feltételezést tesszük, hogy az egyes tételek minősége egymástól független, s így az ellenőrző vizsgálat alapján történő döntés alapja csak a konkrét mintára vonatkozó vizsgálat lehet.

Ezen feltevések alapján a probléma a következő feladat megoldására vezethető vissza:

Legyen adva egy normális eloszlású ξ valószínűségi változó ismeretlen μ várható értékkel és ismert σ szórással. Ezen változó értékére nézve két megfigyelést végzünk, és az első ismeretében akarunk a másodikra következtetni.

Pontosabban a következő feladattal állunk szemben:

Azt kívánjuk, hogy bármekkora is a μ értéke, legfeljebb $1-\beta$ legyen annak együttes valószínűsége, hogy ξ az első esetben ne haladjon meg egy korlátot — jelöljük ezt x -szel, a második megfigyelésnél viszont egy másik korlát, t fölé essék; β a biztonsági együttható. t és β adottak; keressük x azon értékét, amely ennek a feltételnek megfelel. Könnyű belátni, hogy e feltételek teljesítése szempontjából legkedvezőtlenebb az az eset, amelynél μ

éppen x és t számtani közepe. Jelölje $\Phi\left(\frac{u-\mu}{\sigma}\right)$ a ξ eloszlásfüggvényét — $\Phi(u)$ a standard normális eloszlásfüggvény —; akkor a fentiek szerint a

$$(1) \quad \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right)$$

kifejezést kell maximalizálni μ szerint. Deriválás után kapjuk az (1)-et maximálissá tevő μ_0 -ra a következő egyenletet:

$$(2) \quad Z\left(\frac{x-\mu_0}{\sigma}\right) = Z\left(\frac{\mu_0-t}{\sigma}\right)$$

ahol $Z(u) = \frac{\varphi(u)}{\Phi(u)}$ az ún. Mill-féle hányados, a standard normális sűrűség- és eloszlásfüggvény hányadosa. Mivel $Z(u)$ monoton csökkenő, (2)-ből következik az állítás: $\mu_0 = \frac{x+t}{2}$.

(1)-nek μ ezen legkedvezőtlenebb értéke mellett is $(1-\beta)$ -val kell egyenlőnek lennie, azaz

$$\Phi\left(\frac{x - \frac{t+x}{2}}{\sigma}\right) = \sqrt{1-\beta},$$

s így a keresett korlátra a következő kifejezést kapjuk:

$$(3) \quad x = t + 2\sigma \Phi^{-1}(\sqrt{1-\beta}).$$

Ha a hazai ellenőrzés során nem egy, hanem több, mondjuk n darab vizsgálatot végeznek, akkor a talált n darab Howard-szám átlagára a korlátot a

$$(4) \quad \sqrt{n} Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \sqrt{n}\right) = Z\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \sqrt{n}\right) \Phi\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right) = 1-\beta$$

egyenletrendszer x -re való megoldásával kapjuk meg. A (4) egyenletrendszer a Mill-féle hányados táblázata alapján minden különösebb nehézség nélkül megoldható.

Az alábbi táblázatban adjuk az előzetes vizsgálatnál alkalmazandó x korlátot $n=1, 2, 3, 4$ -re $t=40$ és $\sigma=7,43$ mellett és néhány valószínűségi szintre. (A szórás a megbízó intézet által végzett nagyszámú vizsgálat révén kapott empirikus adat.)

$n \backslash \beta$	0,85	0,90	0,95	0,99
1	36	33	29	21
2	36	33,5	30	23
3	36	33,67	30,33	24
4	35,75	33,5	30,25	24,25

A táblázatból látható, hogy az előzetes vizsgálatok számát növelve a kapott korlát eleinte egy kicsit növekszik, majd lassan csökken. Ez természetesen nem jelenti azt, hogy ha van rá lehetőség, nem érdemes minél több előzetes vizsgálatot végezni, hiszen a feltüntetett korlát a kapott Howard-számok átlagára vonatkozik.

Ha a transzformált értékekkel számítjuk ki az előzetes minőségellenőrzési határokat, akkor azt tapasztaljuk, hogy a 85 és 90 %-os szintek esetén a transzformáció nem változtatja meg a határokat. A magasabb 95, illetve 99 %-os szintek esetén a transzformáció általában emeli a határokat. Az utóbbi két szintre a transzformációval nyert határokat az alábbi táblázat adja:

$n \backslash \beta$	0,95	0,99
1	29	23
2	30	25
3	30,67	25,33
4	30,75	25,5

2. Az előző pontban úgy kerestük az előzetes vizsgálatnál alkalmazandó korlátot, hogy a másodfajú hiba, $1-\beta$, előre rögzítve volt. A valószínűségi szint megválasztása azonban önkényes. Ez az önkényesség elkerülhető, ha nem rögzítjük előre a valószínűségi szintet, hanem gazdaságossági számítások alapján állapítjuk meg.

Legyen az a kár, amit az a helytelen döntés okoz, hogy az előzetes vizsgálat során visszautasítottuk a tételt, bár az a második vizsgálat alkalmával átment volna, w_1 , az a kár pedig, amit az okoz, hogy elfogadtunk egy olyan tételt, amelyiket a második vizsgálat során visszautasítanak, w_2 (az oda-vissza szállítás költsége, esetleg még más okozott költség). Ekkor a helytelen döntés által okozott várható kár

$$(5) \quad w_1 \Phi\left(\frac{\mu-x}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) + w_2 \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Phi\left(\frac{\mu-t}{\sigma}\right).$$

x -et úgy akarjuk megválasztani, hogy ez a kár μ legkedvezőtlenebb értéke mellett a lehető legkisebb legyen. Vagyis az (5) kifejezés μ szerinti maximumának x szerinti minimum-helyét kívánjuk meghatározni.

Az első részben láttuk, hogy (5) első tagjának μ szerinti maximuma a $\mu = \frac{x+t}{2}$ helyen van. Hasonló módon belátható, hogy a második tagban szereplő kifejezés is μ -ben ugyanezen a helyen veszi fel a maximumát. Így azt kapjuk, hogy (5) μ szerinti maximuma a $\mu = \frac{x+t}{2}$ helyen van. Tehát a

$$(6) \quad w_1 \left[\Phi\left(\frac{t-x}{2\sigma}\right) \right]^2 + w_2 \left[\Phi\left(\frac{x-t}{2\sigma}\right) \right]^2$$

kifejezést kell x -ben minimálissá tenni. Felhasználva a $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ azonosságot, (6) a következő alakot ölti:

$$(7) \quad \left[\Phi\left(\frac{x-t}{2\sigma}\right) \right]^2 (w_1 + w_2) - 2 \Phi\left(\frac{x-t}{2\sigma}\right) w_1 + w_1$$

Ebből deriválás után azt kapjuk, hogy az x szerinti minimum az

$$(8) \quad x = t + 2\sigma \Phi^{-1}\left(\frac{w_1}{w_1 + w_2}\right)$$

helyen van. Ezt a határt kell tehát alkalmaznunk az előzetes vizsgálatnál. (7)-ből látható, hogy az előzetes korlát csak akkor lesz az átvevő által megszabott t korlát alatt, ha a második tag negatív, azaz $w_2 > w_1$. A módszer alkalmazásához szükség van minden esetben w_1 és w_2 előzetes megbecslésére, de észszerű feltenni, hogy a szállítás csak növelheti a visszautasítás által okozott kárt ($w_2 > w_1$). Ennél az eljárásnál tehát $1 - \beta$ értéke (az ún. másodfajú hiba valószínűsége) nincs előre meghatározva, azt az (1) kifejezés adja, x helyébe (8)-at, μ helyébe $\frac{x+t}{2}$ -t téve. Ha n számú előzetes vizsgálat történik, akkor (5) helyett a

$$w_1 \Phi\left(\frac{\mu-x}{\sigma} \sqrt{n}\right) \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma} \sqrt{n}\right) + w_2 \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \sqrt{n}\right) \Phi\left(\frac{\mu-t}{\sigma} \sqrt{n}\right)$$

kifejezés μ szerinti maximumát kell x -ben minimalizálni.

3. Az eddig tárgyalt két módszernél feltételezzük, hogy az előzetes vizsgálat alapján történő döntés alapja csak a konkrét mintára vonatkozó vizsgálat lehet. Mivel az egyes tételek minősége egymástól nem független

— ugyanazon gyárból kikerülő tételeknél, vagy legalább is egy részüknél nagyjából azonos volt a nyersanyag, azonos a feldolgozás minősége, stb. — hatásosabb eljárás nyerhető, ha az egyes tételekre vonatkozó döntést ugyanattól a gyártól származó egyéb minták eredményétől is függővé tesszük.

Ebben a tárgyalásban tehát azt tesszük fel, hogy egy mintában talált Howard-szám olyan normális eloszlású valószínűségi változó, amelynek várható értéke tételről tételre változva maga is valószínűségi változó, amely egy-egy tételben meghatározott értéket vesz fel. Erről a változóról feltesszük, hogy egy gyáron belül az eloszlása normális. A mintabeli szórásnál most is feltesszük, hogy független a várható értéktől és előre ismert. Vagyis feltesszük, hogy $\xi = \eta + \zeta$, ahol η és ζ függetlenek, η normális eloszlású μ várható értékkel és σ_0 szórással, ζ szintén normális eloszlású 0 és σ paraméterekkel.

Vegyünk most egy mintát az adott tételből. Ennek eredménye legyen $\xi_1 = \eta + \zeta_1$. Feladatunk ennek alapján az x korlátot úgy meghatározni, hogy a $\xi_1 \leq x$ feltétel mellett az adott β mennyiséggel legyen egyenlő annak valószínűsége, hogy a második mintában $\xi_2 = \eta + \zeta_2 \leq t$ legyen, azaz

$$(9) \quad P\{\xi_2 \leq t | \xi_1 \leq x\} = \frac{P\{\xi_1 \leq x, \xi_2 \leq t\}}{P\{\xi_1 \leq x\}} = \beta$$

álljon. Itt a számlálóban egy kétdimenziós normális eloszlásnak az (x, t) helyen felvett értéke áll. Ennek a kétváltozós normális eloszlásnak a paramétereit könnyen kiszámíthatjuk:

$$M\{\xi_1\} = M\{\xi_2\} = \mu$$

$$D^2\{\xi_1\} = D^2\{\xi_2\} = \sigma_0^2 + \sigma^2$$

és

$$r(\xi_1, \xi_2) = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma^2} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}, \quad \text{ahol } \sigma_1^2 = \sigma_0^2 + \sigma^2.$$

Ezen paraméterek ismeretében a kétdimenziós normális eloszlás táblázatának [2] igénybevételével feladatunk numerikusan megoldható.

Egy másik elv lehet az x kiszámításánál az, hogy a $P\{\xi_2 \leq t | \xi_1 \leq x\}$ helyett a $P\{\xi_2 \leq t | \xi_1 = x\}$ valószínűség értékét rögzítjük. Megjegyezzük, hogy ez utóbbi elv szigorúbb, mert

$$(10) \quad P\{\xi_2 \leq t | \xi_1 = x\} = \beta$$

esetén az elküldött tételeket átlagosan β -nál nagyobb arányban fogják átvenni: csak az elküldöttek közül a legrosszabbakat, az előzetes ellenőrzésen éppen átcúszottakat veszik át β arányban. Ezen elv alapján a határ kiszámítása valamivel egyszerűbb, a megoldás a normális eloszlás inverz függvénye segítségével zárt alakban megadható. Mégpedig, mivel ξ_1 és ξ_2 kétdimenziós normális eloszlású fentebb meghatározott paraméterekkel, együttes sűrűségfüggvényük

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1^2\sqrt{\sigma_1^4 - \sigma_0^4}} e^{-\frac{1}{2(1-\sigma_0^4/\sigma_1^4)}\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\sigma_0^2(x-\mu)(y-\mu)}{\sigma_1^4} + \frac{(y-\mu)^2}{\sigma_1^2}\right)} = \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_1^2\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_0^2}} e^{-\frac{\sigma_1^2}{2\sigma^2(\sigma_1^2 + \sigma_0^2)}\left((x-\mu)^2 - 2\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}(x-\mu)(y-\mu) + (y-\mu)^2\right)} \end{aligned}$$

tehát ξ_2 feltételes sűrűségfüggvénye a $\xi_1 = x$ feltétel mellett

$$f(y|x) = \frac{e^{-\frac{\sigma_1^2}{2\sigma^2(\sigma_1^2+\sigma_0^2)}\left((x-\mu)^2-2\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}(x-\mu)(y-\mu)+(y-\mu)^2\right)}}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2}{2\sigma^2(\sigma_1^2+\sigma_0^2)}\left((x-\mu)^2-2\frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}(x-\mu)(t-\mu)+(t-\mu)^2\right)} dt} =$$

$$= \frac{1}{\sigma \sqrt{1+\sigma_0^2/\sigma_1^2}} \varphi\left(\frac{y - \frac{\sigma_0^2 x + \sigma^2 \mu}{\sigma}}{\sigma \sqrt{1+\sigma_0^2/\sigma_1^2}}\right)$$

Igy x -re (10) alapján a következő egyenletet kapjuk:

$$P\{\xi_2 \leq t | \xi_1 = x\} = \Phi\left(\frac{t - \frac{\sigma_0^2 x + \sigma^2 \mu}{\sigma}}{\sigma \sqrt{1+\sigma_0^2/\sigma_1^2}}\right) = \beta$$

Ezt x -re megoldva adódik a keresett határ:

$$(11) \quad x = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(t - \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} \mu - \sigma \sqrt{1 + \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2}} \Phi^{-1}(\beta) \right);$$

n számú előzetes vizsgálat esetén a (10) formula — mint könnyen belátható — a következőképp módosul:

$$x = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \left(t - \frac{\sigma^2}{n\sigma_1^2} \mu - \sigma \sqrt{1 + \frac{\sigma_0^2}{n\sigma_1^2}} \Phi^{-1}(\beta) \right);$$

itt $\sigma_1^2 = \sigma_0^2 + \frac{\sigma^2}{n}$.

A fentiekből látható, hogy ezen számítási mód esetén az ismertnek feltételezett σ -n kívül szükség van az egyes gyárak termékeit jellemző μ és σ_0 értékekre is. Ezeket előzetes adatokból becslés útján határozhatjuk meg. Ha σ értékét pontosnak vesszük, akkor $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 - \sigma^2$ mennyiség becslésének relatív

szórása $\frac{\sigma^2}{2n(\sigma_1^2 - \sigma^2)}$. Ha ez a mennyiség nagy, — pl. az 5–10 %-ot meghaladja —, akkor a becslés bizonytalan és meghamisítja az eredményt. Ilyenkor kevésbé bízhatunk meg a homogénebb anyagra vonatkozó kevés adatból mint a bár kevésbé homogén de több adatból származó becslésben, azért célszerű ilyen esetben σ_1 helyébe az összes — nem csak az illető gyárra vonatkozó — adatokból számított értéket írni.

A megoldásnál a fő nehézséget μ és σ_0 becslése okozza. A megbízó intézet vizsgálatait szerint ugyanis a paradicsompüré minősége nemcsak gyárról-gyárra változik, nemcsak évről-évre változik még ugyanazon gyárnál is, hanem elsősorban a beérkezett nyersanyagtól függően ugyanabban az évben is egészen különböző lehet az egymást követő időszakokban. Ehhez járul még az a kísérletek során megfigyelt tény is, hogy a talált Howard-szám függ a megfigyelő személytől is, ugyanazon tételből vett mintákban különböző megfigyelők szignifikánsan eltérő Howard-számokat figyeltek meg. Ezért

ezen paramétereket csak akkor lehet akár az előző évi adatokból, akár az abban az évben már leszállított tételek adataiból eredményesen becsülni, ha feltehető, hogy a nyersanyag minőségében, a gyártási viszonyokban nem következett be időközben lényeges változás.

IRODALOM

- [1] HALD, A: *Statistical theory with engineering applications*. Wiley, New York, 1952.
[2] PEARSON, K.: *Tables for statisticians and biometricians, II*. Cambridge University Press, Cambridge, 1931.

О СТАТИСТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ МИКРО- БИОЛОГИЧЕСКОМ КОНТРОЛЕ ТОМАТНЫХ КОНЦЕНТРАТОВ

Ö. ÉLTETŐ и K. SARKADI

Резюме

Авторы занимаются с вопросами, связанными с следующей проблемой:

Некоторая партия томатного пюре только тогда принимается покупателем, если так называемое „число Howard-a“, найденное с помощью выборки, взятой из партии, не превосходит некоторое определённое число.

Спрашивается, как приходится проделать предварительный контроль качества, чтобы нехорошие партии задерживались. Предположено, что распределение „числа Howard-a“ приблизительно нормальному. Предполагается, что дисперсия известна из эмпирических данных. Ошибка, возникающая из гетероскедастичности, может быть элиминирована гомоскедастичным преобразованием.

Трактовка проблемы проделана авторами на основе следующих трёх принципов:

1. Предписано, что вероятность следующего события: при первом контроле партия принимается и при втором контроле отклоняется, не превосходит $1-\beta$. Решение даётся формулой (3).

2. Пусть w_1 означает вред, подорванный при первом контроле, если задержится одна партия, которая могла бы приниматься, и w_2 вред, подорванный в том случае, когда передаётся одна партия, которая не будет приниматься. В этом случае минимаксное решение даётся формулой (8).

3. Предполагается, что среднее значение „числа Howard-a“ одной партии тоже является случайной величиной, распределение которой в случае одной фабрики есть нормальное с параметрами μ и σ . Эта проблема может быть численно решена с помощью таблицы двухмерного нормального распределения [2] (см. формулу (9)).

ON THE STATISTICAL PROBLEMS ARISING IN MICROBIOLOGICAL EXAMINATION OF TOMATO PURÉES

Ö. ÉLTETŐ and K. SARKADI

Summary

Authors deal with the questions connected with the following problem.

A lot of tomato purée will be accepted by the consumer if the Howard-count found in the sample taken out from the lot in question doesn't exceed a fixed limit. What limit is to be used by the producer on the occasion of a previous quality control for the purpose of retaining the bad lots? It is assumed to be legitimate to approach the distribution of the Howard-count by the normal one. The variance is assumed to be known from empirical data. The error arising from the heteroscedasticity can be eliminated by a homoscedastic transformation.

The problem is discussed on the grounds of the following three principles:

1. It will be prescribed that the joint probability of accepting in the first and rejecting in the second examination would be not greater than $1-\beta$. The solution is given by formula (3).

2. Let w_1 be the loss caused by the wrong decision in the first examination if we retain a lot which would be accepted, and w_2 the loss if we dispatch a lot which will be rejected. In this case the minimax solution is given by formula (8).

3. It is assumed that the expected value of the Howard count of a lot is itself a random variable varying in the lots transported from the same producer according to $N(\mu, \sigma_i)$ normal probability law. The problem can be solved numerically by the aid of the table of the two-dimensional normal distribution [2] (see formula (9)).

ELLENÁRAMÚ SZÉTVALASZTÓ VEGYIPARI ALAPMŰVELETEK ELMÉLETI FOKOZATSZÁMÁNAK MEGHATÁROZÁSÁRÓL, I.

JUNG GITTA¹⁾, RÓZSA PÁL és SÁRKÁNY GYÖRGY²⁾

Bevezetés

Az extrakció, abszorpció és rektifikálás az anyagátmenettel kapcsolatos ellenáramú szétválasztó alpműveletek leggyakoribb csoportját alkotja. E három művelet mechanizmusának rendkívül hasonló jellege teszi kézenfekvővé elméleti tárgyalásuk hasonlóságát is. (Lásd: [1], [2], [3].) A mechanizmus lényeges vonásai a következők. Két, egymással korlátoltan vagy egyáltalán nem elegyedő fluidum-áram halad egymással szemben; az egyik fluidum-áram a művelet során egy vagy több értékes komponensben elszegényedik, a másik az előbbi rovására dúsul. Jelen tárgyalásban csupán egy értékes komponensre szorítókunk. Ilyen értelemben a műveletekben legfeljebb három anyag: A , B , C szerepel. Legyen az értékes anyag C , amelyet túlnyomóan A -val és esetleg kevés B -vel képezett elegyből kell kinyernünk. A és C egymással korlátlanul elegyednek. A és B egymással csak korlátoltan, illetve határesetben egyáltalán nem elegyednek. B és C elegyedhetnek korlátlanul vagy korlátoltan. Ez esetben *extrakción* azt értjük, hogy az A folyadékkal képezett, kevés B -t tartalmazó egyetlen $A + C$ fázisból másik fázist alkotó B oldószerrel kioldjuk C nagyrésztét, majd B -től további művelettel elválasztjuk C -t.

Abszorpción azt értjük, hogy $A(+B)$ úgynevezett indifferens gázzal elegyített C gázt az $A + B + C$ gázelegyből B folyadékkal kioldjuk (abszorbeáljuk) és az így nyert $B + C$ elegyet használjuk fel tovább.

A fenti két műveletben tehát lényegében $A + C$ elegy többé-kevésbé tökéletes szétválasztása megy végbe, mindkét esetben B folyadék (oldószer, szolvens) segítségével.

Rektifikálásnál, amikor egyetlen értékes komponensről beszélünk (ez a kétkomponensű rektifikálás esete), az $A + C$ elegyet nem harmadik, B anyag segítségével bontjuk szét, illetve állítunk elő belőle előírt tisztaságú C -t, hanem a B oldószer szerepét az $A + C$ eleggyel közölt hő játssza. Extrahálás és abszorpció megoszlási egyensúlyon, a rektifikálás hőközléssel előállított párolgási (folyadék-gőz) egyensúlyon alapszik. Az elszegényedés, illetve dúsulás a két fluidum-áram vagy folyamatos, vagy véges számú úgynevezett buborékoltató *tányéron*, másképpen *fokozaton* lezajló bensőséges érintkezése során,

¹⁾ Chinoin Gyógyszervegyészeti Gyár, Budapest.

²⁾ Budapesti Műszaki Egyetem, Vegyipari Műveletek és Gépek tanszék.

a diffúzió és a fiziko-kémiai fázisegyensúly törvényei szerint megy végbe. Tanulmányunk célja ez utóbbi esetre egy olyan *általános* alpművelet modelljének megválasztása, amely lehetővé teszi a fenti három alpművelet egységes elméleti tárgyalását. Mindhárom művelet célja az értékes komponens elkülönítése előírt tisztaságban. Valamely előírt tisztasági fok eléréséhez a műveletnek meghatározott fokozatszáma tartozik. Tárgyalásunk alapján mátrix-számítás segítségével, gyakorlati számításokra alkalmas közelítő formulákat adunk ezen elméleti fokozatszám (tányérszám) meghatározására.³⁾ Ezekből, az általános modell paramétereire nézve bizonyos értelemszerű megszorításokat téve, közvetlenül kiolvashatók az említett három alpműveletre vonatkozó eredményeink, amelyek — amint erre a dolgozat végén rámutatunk — speciális esetként magukban foglalnak néhány, az irodalomból már ismert eredményt.

1. §. Az általános alpművelet modellje

Felfogásunk szerint a három alpműveletben lényeges az, hogy az ellenáramban fokozatonként két fluidum-fázis érintkezik, valamint az, hogy az ellenáramú rendszer valahol táplálék formájában magába fogadja az értékes komponenszt tartalmazó szétválasztandó elegyet. Ennek megfelelően *általános* alpműveletként egy olyan n -fokozatú extrakciót tekintünk, amely a k -adik fokozatnál táplálást kap (1. ábra). A választott műveletmodell visszafolyás nélküli (lásd: [2], 167. oldal). Az egyes anyagáramok (fázisok) az elkülönítendő értékes komponenszt és a két oldószer egyikét tartalmazzák. A valóságban mindegyik fázis a másik oldószerből is old bizonyos mennyiséget.

Feladatunk az általános alpművelet fokozatszámának (elméleti tányérszámának, n -nek) meghatározása. Az egyenletrendszert, melyből a keresett fokozatszámot, n értéket meghatározhatjuk, az egyes fokozatokra felírt — C anyagra vonatkozó — úgynevezett anyagmérlegek alkotják. Ahhoz, hogy az anyagmérlegeket felírassuk, vezessük be a következő jelöléseket (1. ábra).

Legyen az i -edik fokozatban x_i az értékes anyag (alkalmasan választott) koncentrációja a ránézve szegényítendő fázisban és y_i ugyanez a dúsítandó fázisban (abszorpciánál kivételesen fordítva szokásos); L_i az i -edik fokozatról távozó, főtömegében A -ból és C -ből álló (kevés B -t tartalmazó) szegényítendő fázis (alkalmasan választott) anyagáramának sebessége, V_i a megfelelő dúsítandó fázis anyagáramának sebessége. Ilyen értelemben $L_i x_i$, illetve $V_i y_i$ mindig bizonyos C anyagmennyiséget jelentenek. x és L , valamint y és V dimenzióját a művelet jellegének megfelelően választjuk meg (a koncentrációk és anyagáramok dimenzióit lásd a 243. oldalon). Ugyanilyen értelemben x_T és T a táplálék jellemzői.

Az anyagmérlegek ekkor a következő alakban írhatók:

$$-L_{i-1}x_{i-1} + L_i x_i + V_i y_i - V_{i+1} y_{i+1} = T x_T \delta_{ik}; \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

ahol δ_{ik} a Kronecker-féle szimbólum⁴⁾, a táplálás a k -adik tányéron történik és az 1. ábra alapján $V_{n+1} = V_0$, $y_{n+1} = y_0$.

³⁾ A mátrix-számításnak a vegyipari műveletek elméletében való alkalmazását illetően lásd: [4].

⁴⁾ A Kronecker-szimbólum jelentése:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = k \\ 0 & \text{ha } i \neq k \end{cases}$$

Ebben az egyenletrendszerben legáltalánosabb esetben az egyes fokozatokon szereplő koncentrációkat és az egyes fokozatokkal kapcsolatos anyagáramok sebesség-értékeit, tehát az x_i ($i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n-1$), L_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$), y_i , V_i ($i = 1, 2, \dots, n$) értékeket tekintik ismeretleneknek, valamint a fokozatoknak, vagyis az egyenletrendszerben az egyenleteknek a számát a táplálás előtt (k) és a táplálás után ($n-k$). Műveleti paraméterként adott T , x_T , x_0 , x_k , x_n , y_0 , L_0 és V_0 értéke.⁵⁾ Az ismeretlenek meghatározására eddig mindössze n egyenletet írtunk fel. További n egyenletet nyerünk, ha az ún. fázisegyensúlyi görbe alapján ismertnek tekintjük az x_i és y_i értékek között fennálló $y_i = f(x_i)$ összefüggést. Ennyi egyenlet a 2. §-ban leírt egyszerűsítő feltételek mellett elegendő az elméleti fokozatszám kiszámításához.

2. §. Az általános alpművelet egyenletrendszere

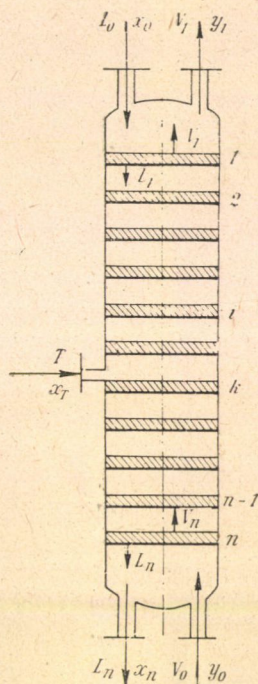
Feladatunk, mint már említettük, az egyenletek számának, n értékének, az ismert paraméterek explicit függvényeként való meghatározása:

$$n = F(T, x_T, x_0, x_k, x_n, y_0, L_0, V_0).$$

Első pillanatra ugyan szokatlannak tűnik az, hogy egy egyenletrendszerből az egyenletek számát kívánjuk meghatározni, azonban bizonyos — a gyakorlati igényeknek megfelelő — feltételek teljesülése ezt lehetővé teszi. Abból a célból, hogy ezeket a — továbbiakban részletezendő — feltételeket alkalmas módon felhasználhassuk, az általános alpművelet fokozatait $\nu + 1$ csoportra osztjuk, ahol egy-egy csoport p_i ($i = 0, 1, \dots, \nu$) számú fokozatot tartalmaz. Ennek megfelelően az egyes fokozatokon szereplő koncentrációkat és az egyes fokozatokkal kapcsolatos anyagáramok sebesség-értékeit kettős indexszel fogjuk jellemezni. A k -adik fokozatnak — ahol a táplálás történik — p_{k-1} , $k-1$ indexpár, az utolsó (n -edik) fokozatnak pedig a p_ν , ν indexpár fog megfelelni. Ezek alapján az általános alpműveleti modell anyagmérlegei az (1) alapegyenletrendszerbe foglalhatók. (Lásd a mellékletet!) Ha az (1) alapegyenletrendszer mindkét oldalát olyan n -edrendű $[h_{ji}]$ felső háromszögmatrixszal szorozzuk, melynek a szükségképpen 0-val egyenlő elemein kívül valamennyi eleme 1, azaz

$$h_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{ha } j \leq l \\ 0 & \text{ha } j > l \end{cases}$$

akkor az előbbinél jóval egyszerűbb (2) egyenletrendszert nyerjük.⁶⁾ (Lásd



1. ábra

Az általános extraktor vázlata

⁵⁾ Általános esetben a táplálás helyéül nem azt a fokozatot választják, amelyen $x_T = x_k$. (Lásd pl.: [5], 151. oldal.)

⁶⁾ Az egyenletrendszer ezen átalakításának lényege az, hogy a fokozatokra vonatkozó anyagmérlegek helyett egy-egy fokozatig terjedő készülékrész anyagegyenlegét használjuk fel.

a mellékletet!) Ezek után a (2) egyenletrendszer egyenleteinek a számát, tehát az általános alpműveleti modell elméleti fokozatszámát, a következő feltételek mellett határozzuk meg.

a) Az $y=f(x)$ egyensúlyi összefüggéssel meghatározott görbét⁷⁾ — amelynek egyes pontjai fiziko-kémiai vizsgálatokból ismeretesek — az (x_0, x_n) intervallumban bizonyos előre meghatározott $y'_i=f(x'_i)$, $(i=1, 2, \dots, \nu)$ pontjain áthaladó, $\nu+1$ lineáris szakaszból álló húrpoligonon közelítjük. Az egyes lineáris szakaszok egyenlete legyen $y=K_i x + K'_i$ ($i=0, 1, \dots, \nu$). Az x'_i helyeket — egyébként tetszőlegesen — úgy vesszük fel, hogy a húrpoligon (a szemlélet alapján) jól közelítse az egyensúlyi görbét, és a táplálékot magába fogadó fokozaton levő, adott x_k koncentráció ezek közül valamelyikkel — mondjuk az x_k értékkel — megegyezzek. Ezzel indokolást nyer az a tény, hogy az (1) egyenletrendszer felírásánál a fokozatokat csoportokra osztottuk. Ugyanis, ha az (1) egyenletrendszerben az x_{pi} , illetve y_{pi} koncentrációértékeket ($i=0, 1, \dots, \nu$) úgy választjuk, hogy

$$x_{pi} = x'_{i+1}, \quad \text{illetve} \quad y_{pi} = y'_{i+1}; \quad i=0, 1, \dots, \nu,$$

ahol

$$x'_{\nu+1} = x_n, \quad \text{illetve} \quad y'_{\nu+1} = y_n,$$

akkor az (1) egyenletrendszer egy-egy fokozatcsoportja, a húrpoligonon közelített egyensúlyi görbe egy-egy lineáris szakaszához tartozó, megfelelő fokozatokat tartalmazza (2. ábra).

b) Feltételezzük továbbá, hogy a művelet úgynevezett munkavonala egyenes. Ez annak a feltételnek felel meg, hogy a táplálás előtt, illetve a táplálás után az egymás mellett ellenáramban haladó két fázis anyagáramának sebességét jellemző L_i és V_i értékek állandók. Ez az állandóság két úton valósulhat meg. Ha A és B nem elegyednek, akkor A és B érintkezése során A -ból B -be, illetve fordítva semmi sem oldódik át. Ekkor L az A -nak moláris sebességével azonosítandó, x pedig C -nek A -ra vonatkozó mólviszonya.

Ha A és B korlátoltan elegyednek, akkor L állandósága azt jelenti, hogy az $A+C$ elegy az A/C arányra való tekintet nélkül ugyanannyi B -vel képez egyetlen fázist egyszer A -val, másszor B -vel túlsúlyban. Ilyenkor x és y úgynevezett oldószermentes móltörtek, tehát

$$x = \left(\frac{C_{\text{mól}}}{A_{\text{mól}} + C_{\text{mól}}} \right)_{L \text{ fázisban}}$$

és

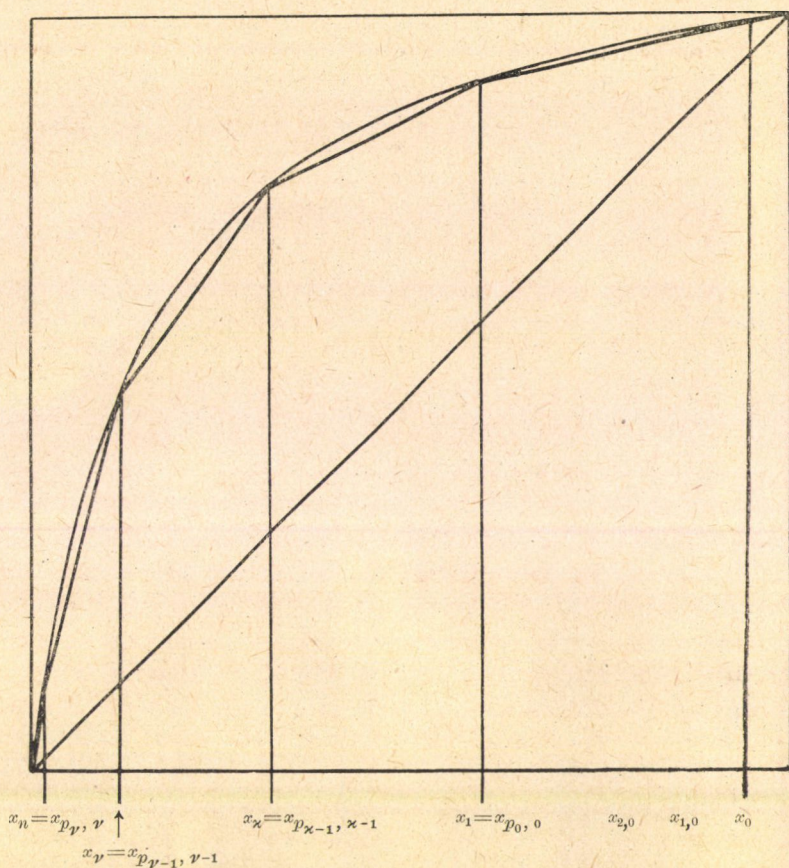
$$y = \left(\frac{C_{\text{mól}}}{A_{\text{mól}} + C_{\text{mól}}} \right)_{V \text{ fázisban}},$$

L és V pedig moláris sebességek és $A+C$ -vel azonosítandók. Állandóságuk most annyit jelent, hogy A és C helyet cserélnek L és V között, úgy, hogy egy mól L -ből V -be lépő C helyett V -ből L -be egy mól A lép. Az $A+C$ moláris sebesség fokozatról fokozatra állandó. Ez felel meg a rektifikálásnál ismert állandó moláris párolgás és lefolyás tételének. Itt a B anyag nem

⁷⁾ Az $y=f(x)$ függvényről — a tapasztalat alapján — feltehetjük, hogy monoton nem csökkenő, folytonos és szakaszonként sima.

$$\begin{aligned}
& L_{10}x_{10} + V_{10}y_{10} - V_{20}y_{20} = L_0x_0 \\
& -L_{10}x_{10} + L_{20}x_{20} + V_{20}y_{20} - V_{30}y_{30} = 0 \\
& -L_{20}x_{20} + L_{30}x_{30} + V_{30}y_{30} - V_{40}y_{40} = 0 \\
& -L_{p_0-1,0}x_{p_0-1,0} + L_{p_0,0}x_{p_0,0} + V_{p_0,0}y_{p_0,0} - V_{11}y_{11} = 0 \\
& -L_{p_0,0}x_{p_0,0} + L_{11}x_{11} + V_{11}y_{11} - V_{21}y_{21} = 0 \\
& -L_{11}x_{11} + L_{21}x_{21} + V_{21}y_{21} - V_{31}y_{31} = 0 \\
& -L_{p_1-1,1}x_{p_1-1,1} + L_{p_1,1}x_{p_1,1} + V_{p_1,1}y_{p_1,1} - V_{12}y_{12} = 0 \\
& -L_{p_{\kappa-2},\kappa-2}x_{p_{\kappa-2},\kappa-2} + L_{1,\kappa-1}x_{1,\kappa-1} + V_{1,\kappa-1}y_{1,\kappa-1} - V_{2,\kappa-1}y_{2,\kappa-1} = 0 \\
& -L_{p_{\kappa-1}-1,\kappa-1}x_{p_{\kappa-1}-1,\kappa-1} + L_{p_{\kappa-1},\kappa-1}x_{p_{\kappa-1},\kappa-1} + V_{p_{\kappa-1},\kappa-1}y_{p_{\kappa-1},\kappa-1} - V_{1\kappa}y_{1\kappa} = Tx_T \\
& -L_{p_{\kappa-1},\kappa-1}x_{p_{\kappa-1},\kappa-1} + L_{1\kappa}x_{1\kappa} + V_{1\kappa}y_{1\kappa} - V_{2\kappa}y_{2\kappa} = 0 \\
& -L_{p_{\kappa}-1,\kappa}x_{p_{\kappa}-1,\kappa} + L_{p_{\kappa},\kappa}x_{p_{\kappa},\kappa} + V_{p_{\kappa},\kappa}y_{p_{\kappa},\kappa} - V_{1,\kappa+1}y_{1,\kappa+1} = 0 \\
& -L_{p_{p-1},p-1}x_{p_{p-1},p-1} + L_{1p}x_{1p} + V_{1p}y_{1p} - V_{2p}y_{2p} = 0 \\
& -L_{p_{p-2},p}x_{p_{p-2},p} + L_{p_{p-1},p}x_{p_{p-1},p} - L_{p_{p-1},p}x_{p_{p-1},p} + V_{p_{p-1},p}y_{p_{p-1},p} - V_{p_{p-1},p}y_{p_{p-1},p} = 0 \\
& -L_{p_{p-1},p}x_{p_{p-1},p} + V_{p_{p-1},p}y_{p_{p-1},p} = V_0y_0 - L_nx_n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& V_{10}y_{10} = Tx_T + V_0y_0 - L_nx_n + L_0x_0 \\
& -L_{10}x_{10} + V_{20}y_{20} = Tx_T + V_0y_0 - L_nx_n \\
& -L_{p_0-1,0}x_{p_0-1,0} + V_{p_0,0}y_{p_0,0} = Tx_T + V_0y_0 - L_nx_n \\
& -L_{p_0,0}x_{p_0,0} + V_{11}y_{11} = Tx_T + V_0y_0 - L_nx_n \\
& -L_{11}x_{11} + V_{21}y_{21} = Tx_T + V_0y_0 - L_nx_n \\
& -L_{p_1-1,1}x_{p_1-1,1} + V_{p_1,1}y_{p_1,1} = Tx_T + V_0y_0 - L_nx_n \\
& -L_{p_{\kappa-2},\kappa-2}x_{p_{\kappa-2},\kappa-2} + V_{1,\kappa-1}y_{1,\kappa-1} = Tx_T + V_0y_0 - L_nx_n \\
& -L_{p_{\kappa-1}-1,\kappa-1}x_{p_{\kappa-1}-1,\kappa-1} + V_{p_{\kappa-1},\kappa-1}y_{p_{\kappa-1},\kappa-1} = Tx_T + V_0y_0 - L_nx_n \\
& -L_{p_{\kappa-1},\kappa-1}x_{p_{\kappa-1},\kappa-1} + V_{1\kappa}y_{1\kappa} = V_0y_0 - L_nx_n \\
& -L_{p_{\kappa}-1,\kappa}x_{p_{\kappa}-1,\kappa} + V_{p_{\kappa},\kappa}y_{p_{\kappa},\kappa} = V_0y_0 - L_nx_n \\
& -L_{p_{p-1},p-1}x_{p_{p-1},p-1} + V_{1p}y_{1p} = V_0y_0 - L_nx_n \\
& -L_{p_{p-1},p}x_{p_{p-1},p} + V_{p_{p-1},p}y_{p_{p-1},p} = V_0y_0 - L_nx_n
\end{aligned}$$



2. ábra. Az egyensúlyi görbe megközelítése húrpoligonnal

szerepel. Rektifikálásnál ez az eset jó közelítéssel gyakori, extrakciónál ritka szélsőség.

c) Általános esetben fel kell tételezni, hogy a táplálék — annak fizikai állapotától függően — teljes egészében nem csatlakozik egyetlen fluidum-áramhoz, hanem meghatározott része az egyik, másik része a másik fluidum-áramot növeli. A táplálék ezen viselkedését az irodalomban szokásos módon egy q tényezővel vesszük figyelembe.

3. §. Az általános alpművelet elméleti fokozatszámának meghatározása

A fenti feltételek figyelembevételével az alapegyenletrendszer nagy mértékben leegyszerűsödik. Ugyanis, mivel $a)$ alapján az $x_{p_i} = x'_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, \nu-1$) értékek adottak, továbbá a $b)$ feltétel miatt az anyag-áramok L_{ji} és V_{ji} ($j = 1, 2, \dots, p_i$; $i = 0, 1, \dots, \nu$) értékei az egész készülékre

vonatkozó anyagegyenlegből kiszámíthatók, a (2) egyenletrendszer $\nu + 1$ egymástól független egyenletrendszerre esik szét. Ha bevezetjük az

$$\mathbf{L}^{(i)} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ L_{1i} & 0 & & \\ & L_{2i} & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{p_i-1,i} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{V}^{(i)} = \begin{bmatrix} V_{1i} & & & \\ & V_{2i} & & \\ & & V_{3i} & \\ & & & \ddots \\ & & & & V_{p_i i} \end{bmatrix}$$

p_i -edrendű kvadratikusan mátrixokat ($i = 0, 1, \dots, \nu$) és az

$$\mathbf{x}^{(i)} = \begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{p_i i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(i)} = \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{p_i i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

p_i -edrendű oszlopvektorokat ($i = 0, 1, \dots, \nu$), valamint az $L_{p_i i} = L'_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, \nu - 1$) jelölést, akkor ezek az egyenletrendszerek

$$-\mathbf{L}^{(i)} \mathbf{x}^{(i)} + \mathbf{V}^{(i)} \mathbf{y}^{(i)} = \begin{cases} (T \mathbf{x}_T + V_0 \mathbf{y}_0 - L_n \mathbf{x}_n) \mathbf{e}^{(i)} + L'_i \mathbf{x}'_i \mathbf{e}_1^{(i)}; & i = 0, 1, \dots, z-1 \\ (V_0 \mathbf{y}_0 - L_n \mathbf{x}_n) \mathbf{e}^{(i)} + L'_i \mathbf{x}'_i \mathbf{e}_1^{(i)}; & i = z, z+1, \dots, \nu \end{cases}$$

mátrixegyenletek alakjában írhatók fel. Figyelembe véve, hogy az egyensúlyi görbét az $y'_i = f(x'_i)$, ($i = 1, 2, \dots, \nu$) pontjain áthaladó húrpolygonnal helyettesítettük, az $\mathbf{x}^{(i)}$ és $\mathbf{y}^{(i)}$ vektorok között a következő összefüggés áll fenn:

$$\mathbf{y}^{(i)} = K_i \mathbf{x}^{(i)} + K'_i \mathbf{e}^{(i)}; \quad i = 0, 1, \dots, \nu.$$

Továbbá, mivel az egymás mellett ellenáramban haladó két fázis moláris sebességét b) szerint állandónak tekintjük, valamint általános esetben a táplálás áramának c -ben említett kettéoszlását is feltételezzük, tehát

$$L'_i = L, \mathbf{L}^{(i)} = L \mathbf{N}_{p_i} \quad \text{és} \quad \mathbf{V}^{(i)} = V \mathbf{E}_p, \quad \text{ha} \quad i = 0, 1, \dots, z-1, \quad \text{illetve} \\ L'_i = L + q T, \mathbf{L}^{(i)} = (L + q T) \mathbf{N}_{p_i} \quad \text{és} \quad \mathbf{V}^{(i)} = (V + (q-1) T) \mathbf{E}_{p_i}, \quad \text{ha} \quad i = z, \dots, \nu,$$

ahol

$$(3) \quad \mathbf{N}_{p_i} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

p_i -edrendű nilpotens mátrix⁸⁾, \mathbf{E}_{p_i} pedig p_i -edrendű egységmátrix. Ezzel a

⁸⁾ Nilpotens egy \mathbf{N} mátrix, ha létezik olyan p pozitív egész szám, amelyre $\mathbf{N}^p = 0$.

fenti mátrixegyenletek a következőképpen egyszerűsödnek:

$$(4) \quad (-L\mathbf{N}_{p_i} + K_i V \mathbf{E}_{p_i}) \mathbf{x}^{(i)} = (T x_T + V_0 y_0 - L_n x_n - K'_i V) \mathbf{e}^{(i)} + L x'_i \mathbf{e}_1^{(i)};$$

$$i = 0, 1, \dots, z-1$$

$$(5) \quad \{-(L + q T) \mathbf{N}_{p_i} + K_i (V + (q-1) T) \mathbf{E}_{p_i}\} \mathbf{x}^{(i)} =$$

$$= \{V_0 y_0 - L_n x_n - K'_i (V + (q-1) T)\} \mathbf{e}^{(i)} + (L + q T) x'_i \mathbf{e}_1^{(i)};$$

$$i = z, z+1, \dots, v.$$

A táplálás előtti részre vonatkozó (4) egyenleteket osszuk $K_i V$, a táplálás utáni részre vonatkozó (5) egyenleteket pedig $K_i (V + (q-1) T)$ kifejezéssel és vezessük be az

$$(6) \quad r = \frac{L}{V} \quad \text{és} \quad r' = \frac{L + q T}{V + (q-1) T}$$

jelöléseket. Ezzel a táplálás előtti, illetve utáni szakaszokra az

$$(7) \quad \left(\mathbf{E}_{p_i} - \frac{r}{K_i} \mathbf{N}_{p_i} \right) \mathbf{x}^{(i)} = \left(\frac{T x_T + V_0 y_0 - L_n x_n}{K_i V} - \frac{K'_i}{K_i} \right) \mathbf{e}^{(i)} + \frac{r}{K_i} x'_i \mathbf{e}_1^{(i)};$$

$$i = 0, 1, \dots, z-1$$

és

$$(8) \quad \left(\mathbf{E}_{p_i} - \frac{r'}{K_i} \mathbf{N}_{p_i} \right) \mathbf{x}^{(i)} = \left(\frac{V_0 y_0 - L_n x_n}{K_i (V + (q-1) T)} - \frac{K'_i}{K_i} \right) \mathbf{e}^{(i)} + \frac{r'}{K_i} x'_i \mathbf{e}_1^{(i)};$$

$$i = z, z+1, \dots, v$$

mátrixegyenleteket nyerjük, melyek az együtthatómátrix invertálásával általában egyszerűen megoldhatók. Figyelembe véve ugyanis, hogy \mathbf{N}_{p_i} (3) alakú nilpotens mátrix, ezért⁹⁾

$$(\mathbf{E}_{p_i} - \xi \mathbf{N}_{p_i})^{-1} = \sum_{j=0}^{p_i-1} (\xi \mathbf{N}_{p_i})^j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \xi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \xi^2 & \xi & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi^{p_i-1} & \xi^{p_i-2} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Az általunk vizsgált egyenletekben azonban az $\mathbf{x}^{(i)}$ vektorok utolsó komponense, $x_{p_i} = x'_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, v$) ismert mennyiség, viszont ismeretlen az egyenletek száma, p_i . Ennek meghatározására felírjuk a (7) és (8) egyenletek

$$\mathbf{x}^{(i)} = \left(\mathbf{E}_{p_i} - \frac{r}{K_i} \mathbf{N}_{p_i} \right)^{-1} \left\{ \left(\frac{T x_T + V_0 y_0 - L_n x_n}{K_i V} - \frac{K'_i}{K_i} \right) \mathbf{e}^{(i)} + \frac{r}{K_i} x'_i \mathbf{e}_1^{(i)} \right\};$$

$$i = 0, 1, \dots, z-1,$$

⁹⁾ Lásd pl.: [6].

illetve

$$x^{(i)} = \left(E_{p_i} - \frac{r'}{K_i} N_{p_i} \right)^{-1} \left\{ \left(\frac{V_0 y_0 - L_n x_n}{K_i (V + (q-1)T)} - \frac{K'_i}{K_i} \right) e^{(i)} + \frac{r'}{K_i} x'_i e_1^{(i)} \right\};$$

$$i = z, \dots, v$$

alakú megoldásának (ismert) utolsó komponensét:

$$x'_{i+1} = \frac{1 - \left(\frac{r}{K_i} \right)^{p_i}}{1 - \frac{r}{K_i}} \left(\frac{Tx_T + V_0 y_0 - L_n x_n}{K_i V} - \frac{K'_i}{K_i} \right) + \left(\frac{r}{K_i} \right)^{p_i} x'_i; \quad i = 0, 1, \dots, z-1$$

$$x'_{i+1} = \frac{1 - \left(\frac{r'}{K_i} \right)^{p_i}}{1 - \frac{r'}{K_i}} \left(\frac{V_0 y_0 - L_n x_n}{K_i (V + (q-1)T)} - \frac{K'_i}{K_i} \right) + \left(\frac{r'}{K_i} \right)^{p_i} x'_i; \quad i = z, z+1, \dots, v.$$

Innen a fokozatok száma az egyes (x'_{i+1}, x'_i) szakaszokban, — tekintetbe véve, hogy $K_i x'_i + K'_i = f(x'_i)$, ha $i = 0, 1, \dots, v+1$ — a táplálás előtti részen

$$p_i = \frac{\log \left(1 + \frac{(r - K_i)(x'_i - x'_{i+1})}{f(x'_i) - \left\{ r x'_i + \frac{Tx_T + V_0 y_0 - L_n x_n}{V} \right\}} \right)}{\log \frac{r}{K_i}}; \quad i = 0, 1, \dots, z-1,$$

a táplálás utáni részen pedig

$$p_i = \frac{\log \left(1 + \frac{(K_i - r')(x'_i - x'_{i+1})}{f(x'_{i+1}) - \left\{ r' x'_{i+1} - \frac{L_n x_n - V_0 y_0}{V + (q-1)T} \right\}} \right)}{\log \frac{K_i}{r'}}; \quad i = z, z+1, \dots, v.$$

Mivel $k = \sum_{i=0}^{z-1} p_i$ és $n = \sum_{i=0}^v p_i$, a táplálás előtti, illetve utáni összes fokozatok számát abban az esetben, amikor az egyensúlyi görbét hurpoligonnal közelítjük, az alábbi közelítő képletekkel számíthatjuk:

$$(9) \quad k = \sum_{i=0}^{z-1} \frac{\log \left(1 + \frac{(r - K_i)(x'_i - x'_{i+1})}{f(x'_i) - \left\{ r x'_i + \frac{Tx_T + V_0 y_0 - L_n x_n}{V} \right\}} \right)}{\log \frac{r}{K_i}}$$

$$(10) \quad n-k = \sum_{i=x}^r \frac{\log \left(1 + \frac{(K_i - r')(x'_i - x'_{i+1})}{f(x'_{i+1}) - \left\{ r' x'_{i+1} - \frac{L_n x_n - V_0 y_0}{V + (q-1)T} \right\}} \right)}{\log \frac{K_i}{r'}}.$$

(r és r' kifejezését (4) szolgáltatja, továbbá $x'_x = x_k$ és $x'_{r+1} = x_n$, — amint azt a) alatt már említettük).

A kapott közelítő formulákat gyakorlati számításokra akkor célszerű használni, amikor az egyensúlyi görbét az (x_0, x_k) , illetve (x_k, x_n) intervallumban kevés (két-három) lineáris szakaszból álló húrpoligonon helyettesítjük. Ennek oka — amellet, hogy a szakaszok számának növelésével a számítási munka is tetemesen megnövekszik — a következő. A fokozatok száma, Σp_i , két részből tevődik össze:

$$\Sigma p_i = \Sigma [p_i] + \Sigma (p_i).$$

(Itt $[p_i]$ p_i egész részét, (p_i) pedig p_i tört részét jelenti.) Kevés számú lineáris szakasz esetén a fenti két tagban $\Sigma [p_i]$ értéke dominál, tehát az a pontatlanság, amit a tört részek összege szükségképpen előidéz, nem számottevő. A lineáris szakaszok számának növekedésével azonban a $\Sigma [p_i]$ összeg zérussá válik és a megmaradó $\Sigma (p_i)$ összeg miatt helytelen eredményre juthatunk.

Abban az esetben, amikor egy-egy fokozat alatt az egyensúlyi görbe egyenesnek tekinthető, (ez akkor következik be, ha a művelet úgynevezett munkavonala közel van az egyensúlyi görbéhez, és ennek következtében egy-egy fokozat alatt a koncentráció változása olyan kicsi, hogy az $y=f(x)$ függvény változási sebessége ezalatt állandónak tekinthető), az (x'_{i+1}, x'_i) beosztási részek számát növelve, a (9) és (10) kifejezésekben álló összeg határértéke a fokozatszámokra pontosabb közelítést ad.

Legyen $\Delta x'_i = x'_i - x'_{i+1}$ a beosztási részek hossza, vegyük tekintetbe, hogy $K_i = \Delta y'_i / \Delta x'_i$ és alkalmazzuk a differenciálszámítás középértéktételét. Ekkor a következő összefüggésekre jutunk:

$$k' = \lim_{\max \Delta x'_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{x-1} \frac{\left(r - \frac{\Delta y'_i}{\Delta x'_i} \right) \Delta x_i}{\frac{f(x'_i) - \left(r x'_i + \frac{T x_T + V_0 y_0 - L_n x_n}{V} \right)}{\log \frac{r}{\frac{\Delta y'_i}{\Delta x'_i}}}} - \lim_{\Delta x'_i \rightarrow 0} \sum_1 (\Delta x'_i) \Delta x'_i$$

$$n' - k' = \lim_{\max \Delta x'_i \rightarrow 0} \sum_{i=x}^r \frac{\left(\frac{\Delta y'_i}{\Delta x'_i} - r' \right) \Delta x'_i}{\frac{f(x'_{i+1}) - \left(r' x'_{i+1} - \frac{L_n x_n - V_0 y_0}{V + (q-1)T} \right)}{\log \frac{\frac{\Delta y'_i}{\Delta x'_i}}{r'}}} - \lim_{\Delta x'_i \rightarrow 0} \sum_2 (\Delta x'_i) \Delta x'_i$$

(A k és n mellett álló vessző csupán a (9) és (10) képletekben lévő k és n értékétől való megkülönböztetés miatt szerepel.)

Mivel a kapott kifejezésekben szereplő szumma egy-egy határozott integrál közelítő összege, és a második tagban szereplő $\Sigma_1(\Delta x'_i)$ illetve $\Sigma_2(\Delta x'_i)$ kifejezések $\Delta x'_i$ -vel együtt maguk is 0-hoz konvergálnak, k' és $n'-k'$ értékét a

$$(11) \quad k' = \int_{x_k}^{x_0} \frac{\frac{L}{V} - f'(x)}{f(x) - \left(\frac{L}{V} x + \frac{Tx_T + V_0 y_0 - L_n x_n}{V} \right) \log \frac{L/V}{f'(x)}} dx$$

és

$$(12) \quad n' - k' = \int_{x_n}^{x_k} \frac{f'(x) - \frac{L + qT}{V + (q-1)T}}{f(x) - \left(\frac{L + qT}{V + (q-1)T} x - \frac{L_n x_n - V_0 y_0}{V + (q-1)T} \right) \log \frac{f'(x)}{\frac{L + qT}{V + (q-1)T}}} dx$$

határozott integrálok szolgáltatják. Az integrandus nevezőjének zárójelben álló tagja, az ellenáramú szétválasztó műveletek ismert munkavonalának kifejezése.

Ez az eredmény az 1. ábrán vázolt általános alpművelet elméleti fokozat számának közelítő értékét adja abban az esetben, amikor egy-egy fokozat alatt az egyensúlyi görbe egyenesnek tekinthető.

Meg kell jegyeznünk, hogy ha azt az erősebb megszorítást tesszük, hogy az egyes fokozatokon a koncentráció változása ugyanakkora, ami akkor következik be, ha az egyensúlyi görbe érintőjét párhuzamosnak tekintjük a művelet munkavonalával, akkor, mivel

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{a-b}{\log \frac{a}{b}} = a,$$

a fenti integrálok helyett az alábbiakat nyerjük:

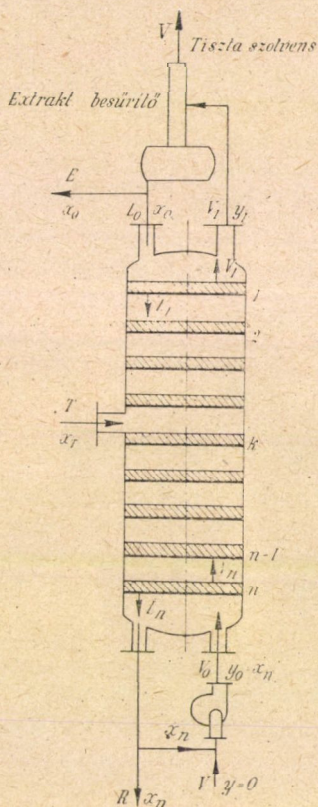
$$k'' = \int_{x_k}^{x_0} \frac{\frac{L}{V}}{f(x) - \left(\frac{L}{V} x + \frac{Tx_T + V_0 y_0 - L_n x_n}{V} \right)} dx$$

$$n'' - k'' = \int_{x_n}^{x_k} \frac{\frac{L + qT}{V + (q-1)T}}{f(x) - \left(\frac{L + qT}{V + (q-1)T} x - \frac{L_n x_n - V_0 y_0}{V + (q-1)T} \right)} dx$$

(k és n mellett a két vessző az előbbiektől való megkülönböztetést jelent).

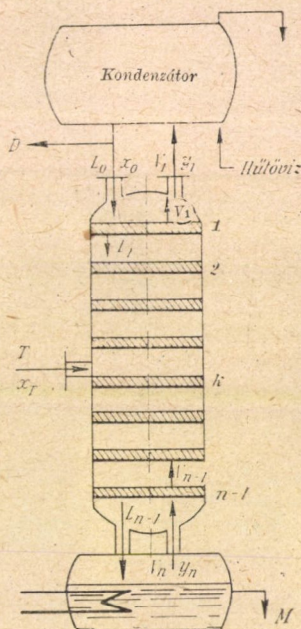
4. §. Az általános alpműveletre vonatkozó eredmény alkalmazása extraktorra, rektifikálóra és abszorberre

A következőkben azt vizsgáljuk meg, hogy az általános alpműveleti modellre kapott fenti eredményeinkből miként adódnak a gyakorlatban szereplő extrakciós, rektifikációs és abszorpciós műveletváltozatokra vonatkozó megfelelő eredmények.



3a. ábra

Extrakt és raffinátum-refluxszal működő extraktor



3b. ábra

Rektifikáló

1. Raffinátum-refluxszal és extrakt-refluxszal működő extraktor (3a. ábra)

Ez az extraktor az általános alpműveletet megvalósító készülékhez képest a következőkkel jellemezhető:

a) A készülék raffinátum-végén az n -edik fokozatból kilépő raffinátum-összetétel egyben a raffinátum-reflux összetételét is megadja, azaz

$$x_n = y_0 = x_R.$$

b) Az utolsó fokozatból kilépő raffinátum egy része (megfelelő mennyiségű szolvens hozzáadása után) refluxként visszakerül a berendezésbe. A raffi-

nátum megmaradó része (R) továbbfeldolgozásra kerülő végtermék:

$$L_n - V_0 = R.$$

A készülék extraktum-végére nézve $a)$ és $b)$ analógiájára

$$c) \quad x_0 = y_{10} = x_E$$

és

$$d) \quad V - L = E.$$

(Az általános alapl műveletben a készülék két végén be-, illetve kilépő anyag-
áram egymástól független volt.)

Az $a) - d)$ összefüggések behelyettesítésével a fokozatok számának
közelítő kifejezése a (9) és (10) képletekből:

$$k = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\log \left(1 + \frac{\left(\frac{L}{V} - K_i \right) (x'_i - x_{i+1})}{\left(K_i - \frac{L}{V} \right) x'_i + K'_i - \frac{E}{V} x_E} \right)}{\log \frac{L}{VK_i}}$$

(ugyanis az extraktor teljes anyagmérlegéből $Tx_T = Ex_E + Rx_R$),

$$n - k = \sum_{i=k}^n \frac{\log \left(1 + \frac{\left(K_i - \frac{L+qT}{V+(q-1)T} \right) (x'_i - x'_{i+1})}{\left(K_i - \frac{L+qT}{V+(q-1)T} \right) x'_{i+1} + K'_i + \frac{R}{V+(q-1)T} x_R} \right)}{\log \frac{K_i (V+(q-1)T)}{L+qT}}.$$

A megfelelő integrálformulák pedig a (11) és (12) összefüggések alapján:

$$k' = \int_{x_k}^{x_E} \frac{\frac{L}{V} - f'(x)}{f(x) - \left(\frac{L}{V}x + \frac{E}{V}x_E \right)} \frac{dx}{\log \frac{L/V}{f'(x)}}$$

$$n' - k' = \int_{x_R}^{x_k} \frac{f'(x) - \frac{L+qT}{V+(q-1)T}}{f(x) - \left(\frac{L+qT}{V+(q-1)T}x - \frac{R}{V+(q-1)T}x_R \right)} \frac{dx}{\log \frac{f'(x)}{\frac{L+qT}{V+(q-1)T}}}.$$

2. Rektifikáló (3b. ábra)

A specifikáló feltételek itt a következők:

$$a) \quad x_n = x_M.$$

A szokásos számozástól eltérően a rektifikáló berendezés legalsó tányérjának az üstöt fogjuk fel. Ennek jogosultságát azzal támasztjuk alá, hogy a maradék koncentrációjához képest az üstben is végbemegy dúsulás.

$$b) \quad V_0 = 0, \quad L_n = M$$

$$c) \quad x_0 = y_{10} = x_D$$

$$d) \quad V - L = D.$$

Ezen összefüggések behelyettesítésével a fokozatok számának közelítő kifejezése:

$$k = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\log \left(1 + \frac{\left(\frac{L}{V} - K_i \right) (x'_i - x'_{i+1})}{\left(K_i - \frac{L}{V} \right) x'_i + K'_i - \frac{D}{V} x_D} \right)}{\log \frac{L}{VK_i}}$$

(ugyanis a rektifikáló teljes anyagmérlegéből $Tx_T = Dx_D + Mx_M$),

$$(13) \quad n - k = \sum_{i=k}^n \frac{\log \left(1 + \frac{\left(K_i - \frac{L + qT}{V + (q-1)T} \right) (x'_i - x'_{i+1})}{\left(K_i - \frac{L + qT}{V + (q-1)T} \right) x'_{i+1} + K'_i + \frac{M}{V + (q-1)T} x_M} \right)}{\log \frac{K_i (V + (q-1)T)}{L + qT}}.$$

A megfelelő integrálformulák a következők:

$$(14) \quad k' = \int_{x_k}^{x_D} \frac{\frac{L}{V} - f'(x)}{f(x) - \left(\frac{L}{V} x + \frac{D}{V} x_D \right)} \frac{dx}{\log \frac{L}{V f'(x)}}$$

$$(15) \quad n' - k' = \int_{x_M}^{x_k} \frac{f'(x) - \frac{L + qT}{V + (q-1)T}}{f(x) - \left(\frac{L + qT}{V + (q-1)T} x - \frac{M}{V + (q-1)T} x_M \right)} \frac{dx}{\log \frac{f'(x)}{\frac{L + qT}{V + (q-1)T}}}.$$

Megfigyelhető, hogy a refluxos extraktor és a rektifikáló fokozatszámának képletei azonosak.¹⁰⁾

¹⁰⁾ Megjegyezzük, hogy a (14) és (15) képletből $f'(x) = L/V$, illetve $f'(x) = (L + qT)/(V + (q-1)T)$ választás mellett adódó integrálok — e választás annak a feltételnek felel meg, hogy az egyes fokozatokon a koncentráció változása ugyanakkora — a szükséges határátmenet elvégzése után (lásd: 236. oldal) megegyeznek a Lewis által felírt megfelelő integrálokkal. (Lásd: [7], 183. oldal.)

3. Teljes refluxszal működő rektifikáló

A 2. alatti specifikáló feltételekhez járul még, hogy $T=D=0$, $L=V$. A fokozatok száma a (13) összefüggésből ($k=0$ helyettesítéssel):

$$n = \sum_{i=0}^r \frac{\log \left(1 + \frac{(K_i - 1)(x'_i - x'_{i+1})}{(K_i - 1)x'_{i+1} + K'_i} \right)}{\log K_i} = \sum_{i=0}^r \frac{\log \frac{(K_i - 1)x'_i + K'_i}{(K_i - 1)x'_{i+1} + K'_i}}{\log K_i}.$$

A megfelelő integrálképlet (15) alapján

$$(16) \quad n' = \int_{x_M}^{x_D} \frac{f'(x) - 1}{f(x) - x} \frac{dx}{\log f'(x)}.$$

Megjegyezzük, hogy az így nyert képlet bizonyos feltevések mellett magában foglalja a végtelen refluxszal működő rektifikáló berendezés elméleti tányérszámának FENSKE-féle értékét is. Ugyanis, ha az egyensúlyi görbe egyenletét

$$f(x) = \frac{\alpha x}{1 + (\alpha - 1)x}$$

alakban vesszük fel, ahol α az állandónak feltételezett úgynevezett relatív illékonyság, és ezt helyettesítjük be a (16) képletbe, akkor az

$$n' = \int_{x_M}^{x_D} \frac{\frac{\alpha}{(1 + (\alpha - 1)x)^2} - 1}{\frac{(\alpha - 1)x(1 - x)}{1 + (\alpha - 1)x} \log \frac{\alpha}{(1 + (\alpha - 1)x)^2}} dx$$

integrálra jutunk. Ezt az integrált elemi úton kiszámítani nem lehet. Ha azonban feltételezzük azt, hogy

$$(\alpha - 1)x \ll 1,$$

— ami egyhébb megszorítás, mint az $\alpha \approx 1$, amit LEWIS használ fel ahhoz, hogy integrálformulájából a FENSKE-féle egyenletet megkapja —, akkor

$$n' = \frac{1}{\log \alpha} \int_{x_M}^{x_D} \frac{dx}{x(1 - x)} = \frac{\log \frac{x_D(1 - x_M)}{x_M(1 - x_D)}}{\log \alpha}$$

adódik, ami megegyezik az ismert FENSKE-féle eredménnyel.

4. Reflux nélküli extraktor

Az idevonatkozó specifikáló feltételek:

$$T=0, \quad V_0=V, \quad L_n=L.$$

A fokozatok száma a (10) képletből ($k=0$ helyettesítéssel):

$$n = \sum_{i=0}^v \frac{\log \left(1 + \frac{\left(K_i - \frac{L}{V} \right) (x'_i - x'_{i+1})}{\left(K_i - \frac{L}{V} \right) x'_{i+1} + K'_i + \frac{L}{V} x_n - y_0} \right)}{\log \frac{K_i V}{L}}.$$

A megfelelő integrálképlet pedig (12)-ből

$$n' = \int_{x_n}^{x_0} \frac{f'(x) - \frac{L}{V}}{f(x) - \left(\frac{L}{V} (x - x_n) + y_0 \right)} \frac{dx}{\log \frac{f'(x)}{L/V}}.$$

5. Abszorber

Ez a berendezés a reflux nélküli extraktortól lényegében nem különbözik. Ezért az ott nyert képlet minden további számítás nélkül rá is vonatkozik, csupán a fázisegyensúlyra és az egyes anyagáramokra vonatkozó szokásos jelöléseket kell alkalmazni.

5. §. A fázisegyensúlyi görbe megközelítése két, illetve egy egyenessel

A közölt integrálformulák jelentősége elsősorban elméleti. Ugyanis a fázisegyensúlyi görbe számára kísérleti pontokon kívül általában nem tudunk olyan explicit függvényt adni, amellyel a nyert integrál elemi úton kiszámítható volna. Ezért a gyakorlati felhasználás szempontjából a megfelelő közelítő képletek lépnek előtérbe.

Külön figyelmet érdemel azonban az az eset, amikor az egyensúlyi görbe a teljes (x_n, x_k) , illetve (x_k, x_0) szakaszon jól közelíthető egy-egy egyenessel. Legyen ezen egyenesek egyenlete

$$f(x) = \begin{cases} K_0 x + K'_0 & \text{az } (x_k, x_0) \text{ szakaszon} \\ K_n x + K'_n & \text{az } (x_n, x_k) \text{ szakaszon.} \end{cases}$$

Ebben az esetben ugyanis az integrálás elemi úton elvégezhető és természetesen ugyanarra az eredményre vezet, mint a megfelelő közelítő összeg, ha annak mindössze egyetlen tagja van. Az általános alpművelet fokozatszámaira ekkor a következő kifejezések adódnak:

$$k = \frac{\log \left(1 + \frac{\left(\frac{L}{V} - K_0 \right) (x_0 - x_k)}{\left(K_0 - \frac{L}{V} \right) x_0 + K'_0 - \frac{Tx_T + V_0 y_0 - L_n x_n}{V}} \right)}{\log \frac{L}{K_0 V}}$$

$$n - k = \frac{\log \left(1 + \frac{\left(K_n - \frac{L + qT}{V + (q-1)T} \right) (x_k - x_n)}{\left(K_n - \frac{L + qT}{V + (q-1)T} \right) x_n + K'_n + \frac{L_n x_n - V_0 y_0}{V + (q-1)T}} \right)}{\log \frac{K_n (V + (q-1)T)}{L + qT}}.$$

Innen az egyes műveletfajtákra, a már közölt specifikációk segítségével az alábbi eredmények adódnak:

1. *Raffinátum-refluxszal és extrakt-refluxszal működő extraktor*

$$k = \frac{\log \left(1 + \frac{\left(\frac{L}{V} - K_0 \right) (x_E - x_k)}{(K_0 - 1) x_E + K'_0} \right)}{\log \frac{L}{K_0 V}}$$

$$n - k = \frac{\log \left(1 + \frac{\left(K_n - \frac{L + qT}{V + (q-1)T} \right) (x_k - x_R)}{(K_n - 1) x_R + K'_n} \right)}{\log \frac{K_n (V + (q-1)T)}{L + qT}}$$

(itt felhasználtuk, hogy $R + E = T$).

2. *Rektifikáló*¹¹⁾

$$k = \frac{\log \left(1 + \frac{\left(\frac{L}{V} - K_0 \right) (x_D - x_k)}{(K_0 - 1) x_D + K'_0} \right)}{\log \frac{L}{K_0 V}}$$

$$n - k = \frac{\log \left(1 + \frac{\left(K_n - \frac{L + qT}{V + (q-1)T} \right) (x_k - x_M)}{(K_n - 1) x_M + K'_n} \right)}{\log \frac{K_n (V + (q-1)T)}{L + qT}}.$$

Ennek az eredménynek a speciális $q=1$ és $K_0 = K_n = K$, valamint $K'_0 = K'_n = 0$ esetén adódó alakja az irodalomban több helyen szerepel. A $q=1$ feltétel forrponon való táplálást jelent, $K'_0 = K'_n = 0$ pedig annyit jelent, hogy az egyensúlyi görbének csak olyan szakaszán dolgozunk, amely az origón áthaladó egyetlen egyenessel helyettesíthető. (Lásd pl. [7], 183. oldal, [8].)

¹¹⁾ Gyakorlati számításokban az itt szereplő képleteket az $L/D = R$ reflux-aránnyal szokás felírni. Tévedések elkerülése végett figyelmeztetünk arra, hogy az itt használt R nem azonos az extrakció raffinátum-áramának R jelével.

3. Teljes refluxszal működő rektifikáló

Minthogy ebben az esetben táplálás nincs, a rektifikálóra vonatkozó képletek módosítását értelemszerűen egyetlen egyenessel megközelíthető görbedarabra végezzük el. Ekkor $K_0 = K_n = K$ és $K'_0 = K'_n = K'$. A fokozatok száma:

$$n = \frac{\log \frac{(K-1)x_D + K'}{(K-1)x_M + K'}}{\log K}.$$

Ha $K' = 0$, akkor ez az eredmény az ismert FENSKE-féle egyenletnek kis x értékekre alkalmazott közelítő kifejezését adja.

4. Reflux nélküli extraktor

$$n = \frac{\log \left(1 + \frac{\left(K - \frac{L}{V} \right) (x_0 - x_n)}{Kx_n - y_0 + K'} \right)}{\log \frac{KV}{L}}.$$

Ez az eredmény $K' = 0$ esetén megegyezik az irodalomban több helyen szereplő képlettel. (Lásd pl. [9], 406. oldal.)

5. Abszorber

esetén a jelölések megfelelő cseréjével a 4. esetben nyert képlet érvényes.

Jelölések

A	... az értékes anyagot hordozó oldószer.
B	... az extraháló oldószer.
C	... az értékes anyag.
D	... a desztillátum moláris sebessége.
E	... az extraktum moláris sebessége.
K	... fázisegyensúlyi állandó.
k	... a táplálást magába fogadó fokozat sorszáma.
L	... az értékes anyagban szegényedő fázis moláris sebessége (a műveletnek megfelelően A -val, illetve $A + C$ -vel kifejezve).
M	... a desztillációs maradék moláris sebessége.
n	... az elméleti fokozatok száma.
q	... a táplálásnak L -hez csatlakozó hányada.
R	... az extraktorból kilépő raffinátum moláris sebessége.
r, r'	... belső reflux-arány a táplálás két oldalán.
T	... a táplálás moláris sebessége.
V	... az értékes anyagban dúsuló fázis moláris sebessége (a műveletnek megfelelően B -vel, illetve $A + C$ -vel kifejezve).
x	... az értékes anyag mólviszonya, illetve móltörtje L -ben.
y	... az értékes anyag mólviszonya, illetve móltörtje V -ben.
E_{p_i}	... egységmátrix (p_i -edrendű).
e	... egységvektor.
N_{p_i}	... p_i -edrendű nilpotens mátrix.
α	... a relatív illékonyág.

IRODALOM

- [1] TILLER, T. M.—TOUR, R. S.: „Stagewise operations — Applications of the calculus of finite differences to chemical engineering”. *Transactions of the American Institute of Chemical Engineers* **40** (1944) 317—332.
- [2] TREYBAL, R. E.: *Liquid extraction*. McGraw-Hill, New-York, 1951. (1. ed.)
- [3] PERRY, J. H.: *Chemical engineer's handbook*. McGraw-Hill, New-York, 1950. (3. ed.)
- [4] ACRIVOS, A.—AMUNDSON, N. R.: „Applications of matrix mathematics to chemical engineering problems”. *Industrial and Engineering Chemistry* **47** (1955) 1533—1541.
- [5] KIRSCHBAUM, E.: *Destillier- und Rektifiziertchnik*. Springer, Berlin, 1950. (2. Aufl.)
- [6] EGERVÁRY, E.: „On a lemma of Stieltjes”. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **15** (1954) 99—103.
- [7] ROBINSON, C. S.—GILLILAND, E. R.: *Elements of fractional distillation*. McGraw-Hill, New-York, 1950. (4. ed.)
- [8] POHL, K.: „Rektifikation niedrigkonzentrierter Zweistoffgemische”. *Chemie-Ingenieur-Technik* **28** (1956) 562—569.
- [9] SHERWOOD, T. K.—PIGFORD, R. L.: *Absorption and extraction*. McGraw-Hill, New-York, 1952 (2. ed.).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА ТЕОРЕТИЧЕСКИХ СТУПЕНЕЙ ПРОТИВОТОЧНЫХ РАЗДЕЛЯЮЩИХ ПРОЦЕССОВ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

G. JUNG, P. RÓZSA и GY. SÁRKÁNY

Резюме

Авторы ищут общую модель для экстракторов, абсорберов и ректификаторов. Из этого — с помощью специфицирующих условий — выводятся приближенные зависимости для вычисления числа теоретических ступеней (тарелок). Общая модель — питаемый в двух местах противоточный многоступенчатый экстрактор. Результаты получены путем решения системы уравнений материальных балансов с помощью матричного исчисления.

Кривая фазового равновесия приближается полигоном, двумя хордами, а часть ее — единственной хордой. В общем случае экстрактора (с двумя питаниями); если кривая фазового равновесия приближается полигоном, состоящим из хорд любого числа, получается приближенная сумма, предел которой является определенным интегралом, если число вершин полигона стремится к бесконечности. Общая приближенная сумма и интеграл при соответствующих условиях дают и известные в литературе зависимости.

DETERMINATION OF THE THEORETICAL STAGE-NUMBER OF COUNTERCURRENT DISTRIBUTIVE CHEMICAL UNIT OPERATIONS

G. JUNG, P. RÓZSA and GY. SÁRKÁNY

Summary

The construction of a generally valid model for extractors, absorbers and rectifiers has been attempted. With the introduction of specific conditions, from this model approximate correlations for the calculation of the theoretical number of plates were derived. This general model is a countercurrent multiple-stage two-feed extractor. The results were obtained through solving the material balance equations by matrix computation.

Good approximations of phase equilibrium curves can be obtained by chordal polygon, two chords or, for a certain part of the curve, by a single chord. In the case of the generalised extractor (with two feed lines), and provided that the approximate phase equilibrium curve is given by a polygon with an arbitrary number of chords, an approximate sum can be computed the limit of which is a definite integral when the number of the vertices of the chordal polygon is infinite. With proper conditions the general approximate sum and integral give the correlations embodied in the literature, as well.

SZÉNSZEMCSÉS ELLENÁLLÁSOK VIZSGÁLATA VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁSI MÓDSZERREL

RÉNYI ALFRÉD

A rádiótechnikában használatos szénszemcsés ellenállások egyrészt kolloid-grafitból vagy koromból álló szénport, másrészt szigetelő műanyagot (fenolgyanta) és (esetleg) kristályos töltőanyagot tartalmaznak. Az ellenállások gyártása úgy történik, hogy a poralakú szigetelő anyagot a szénporral és (esetleg) a poralakú töltőanyaggal elkeverik, a keverékhez acetont adagolnak a keverés nagyobb homogenitásának biztosítása céljából, majd az acetont elpárologtatják. Az így nyert port magas nyomáson és magas hőmérsékleten összepréselik. A kapott ellenállásanyagot az üzeminél magasabb feszültségen „formálják”, ami közben vezetőképessége általában kismértékben még növekszik.

A szénszemcsés ellenállások gyártásánál fontos és nem teljesen megoldott probléma az ellenállás kívánt értékének biztosítása. A gyártási szórás igen nagy, és nem ismereteseek elméletileg megalapozott összefüggések arra vonatkozólag, hogy a szénszemcsés ellenállások (fajlagos) vezetőképessége hogyan függ a szénpor mennyiségének a szigetelőanyag mennyiségéhez való viszonyától, és a szénszemcsék nagyságától, illetve nagyság szerinti eloszlásától.

A Híradástechnikai Ipari Kutató Intézet az ezirányban folyó kutatásokkal kapcsolatban (lásd [1], [2]) 1955-ben felkérte Intézetünket, hogy foglalkozzon a szénszemcsés ellenállások matematikai elméletével. Intézetünkben a problémával kapcsolatban két irányban indult meg a kutatás. A vizsgálatok egy része az áramnak egy-egy szénszemcsében való terjedését tette vizsgálat tárgyává, vagyis a kérdést „mikroszkópikusan” tárgyalta. E vizsgálatokkal PÁL SÁNDOR foglalkozott, aki első közelítésben a szénszemcséket gömböknek tekintette és az egyes gömbökön belüli potenciáeloszlást a potenciáelmélet klaszszikus módszereivel vizsgálta. Ezirányú érdekes vizsgálatait a kérdés megoldásához önmagukban nem voltak elegendők. A szénszemcsés ellenállás vezetőképességét ugyanis igen nagy mértékben befolyásolja a szénszemcsék elhelyezkedése, az egy-egy szemcsével „szomszédos” szemcsék száma és a „szomszédos” szemcsék közötti távolság. A „szomszédos” kifejezést itt és a következőkben abban az értelemben használjuk, hogy két szénszemcsét akkor nevezünk szomszédosnak, ha olyan közel vannak, hogy az áram az egyikről a másikra közvetlenül átterjedhet. Tekintettel a szénszemcsék óriási számára és elhelyezkedésük teljesen szabálytalan, véletlenszerű jellegére, kézenfekvő volt a kérdést más oldalról, a valószínűségi számítás módszereivel megközelíteni próbálni. A vizsgálatok megmutatták, hogy csak a szénszemcsés ellen-

állások valószínűségszámítási vizsgálata vezethet el ezen ellenállások „makroszkópikus” elméletéhez, amely a „mikroszkópikus” elmélet lényeges és nélkülözhetetlen kiegészítése, és a folyamat leírásában a „makroszkópikus” elmélet játssza a döntő szerepet. Jelen közleményben kizárólag e második irányú vizsgálatok eddigi eredményeit ismertetjük.

Az eredetileg kitűzött célt egyelőre nem értük el; más szempontból azonban a vizsgálatok eredeti célkitűzésein túlmenő eredményekhez jutottunk. Az eredeti célkitűzés ugyanis a szénszemcsés ellenállások vezetőképességére vonatkozó *kvantitatív* összefüggés felállítása volt; bár a keresett kvantitatív összefüggést ezideig nem sikerült tisztázni, azonban a számítások várakozáson felül bizonyos kvalitatív összefüggések felismeréséhez nyújtottak segítséget. Ez a következőképpen történt. Eleinte abból a feltevésből indultunk ki, hogy a szénszemcsék úgy oszlanak el a szigetelő anyagban, mintha teljesen véletlenszerűen, egyenletes valószínűség-sűrűséggel helyezték volna el őket. Mászóval, feltettük, hogy a szemcsék középpontjai a Poisson-féle eloszlásnak megfelelően helyezkednek el a rendelkezésre álló térben, olymódon, hogy bármely térrészbe eső szénszemcsék számának várható értéke arányos az illető térrész köbtartalmával, és az arányossági tényező az egész ellenálláson belül állandó. E feltevés és a szénszemcsék nagyságára, továbbá két szomszédos szemcse közötti maximális távolságra vonatkozó adatok alapján az az eredmény adódott, hogy a szénszemcsés ellenállások csak abban az esetben bírnak pozitív vezetőképességgel, ha a szénszemcsék össztömegének a szigetelő anyag össztömegéhez való viszonya egy nagyságrenddel nagyobb a ténylegesen használt ellenállásokban fennálló aránynál. Mászóval, az elmélet arra az eredményre vezetett, hogy a gyakorlatban használt szénszemcsés ellenállások vezetőképessége 0, illetve ellenállása végtelen nagy kellene, hogy legyen. Az elmélet és a tények ellentmondása nyilvánvalóvá tette, hogy az alapfeltevések egyikének tévesnek kell lennie. Mivel a szén és a szigetelő anyag aránya (2%—5%) feltétlenül pontosnak volt tekintendő, és a szénszemcsék átlagos nagysága (300 Å) is elég megbízhatóan meg volt határozva, s a nyert ellenállás értéke 2% széntartalom mellett 10^8 — 10^9 Ohm, 5% széntartalom mellett 10^2 — 10^3 Ohm határok közé esett, csak az a két lehetőség maradt nyitva, hogy vagy a szemcsék egyenletes eloszlására vonatkozó feltevés nem teljesül, vagy az egymástól a feltételezettnél lényegesen nagyobb távolságra eső szemcsék között is fellép vezetés. Annak ellenére, hogy a két szomszédos szemcse közötti, a vezetést még lehetővé tevő maximális távolság közvetlenül nem mérhető és ezen távolságra a számítások során felvett érték hipotétikus, a fellépett ellentmondás azon magyarázatát, hogy e távolságot becsültük meg helytelenül, a számítások tüzetesebb analízise alapján el kellett vetni. A vezetést még lehetővé tevő távolságot két „szomszédos” szemcse között eredetileg 3 Å nagyságrendűnek vettük fel. A tények és az elmélet közötti ellentmondás kiküszöböléséhez ezt az értéket az átlagos szemcse nagyság kb. háromszorosával, pl. 300 Å átlagos szemcse nagyság mellett közel kb. 1000 Å-mel kellett volna pótolni. Ilyen „nagy” távolságra fekvő szemcsék közötti vezetés feltételezése azonban már irreálisnak látszik. Nem maradt tehát más kiút az ellentmondásból; mint a fentemlített első lehetőség, hogy tudniillik a szénszemcsék nem egyenletes sűrűséggel oszlanak el. A szóban forgó szénszemcsés ellenállások metszeteinek a Híradástechnikai Ipari Kutató Intézet által elvégzett mikroszkópikus vizsgálata hamarosan megerősítette, hogy valóban ez a helyzet. Kiderült ugyanis, hogy a szénszemcsék nem oszlanak el egyenletesen az

ellenálláson belül, hanem rétegesen helyezkednek el, amely rétegek behálózzák az ellenállás egész térfogatát. Ezekben a vékony rétegekben a szénszemcsék magas koncentrációja tapasztalható, míg a rétegeken kívül szénszemcsék alig láthatók. Jól látható ez az alábbi fényképfelvételen, amely a Híradástechnikai Ipari Kutató Intézetben készült a Műszaki Egyetem Műanyagipari Tanszékén készített metszetről. A kép százötvenszeres nagyításban mutatja a metszetet. A képen



látható fekete „erek” a szénszemcsékben dús részek, a szürke „szigetek” a fenolgyanta tömbök, míg a világos foltok a töltőanyag.

A réteges struktúra nyilván az ellenállások készítési módjával függ össze. Nem feladatunk itt annak megállapítása, hogy a gyártási folyamat mely fázisában és milyen okok hatására történik meg ez a rétegződés. Annyi nyilvánvaló, hogy a műanyag-por szemcséi lényegesen (kb. két nagyságrenddel) nagyobbak a szénszemcséknél, a szénszemcsék csak a műanyag-por szemcsék felületén helyezkednek el és (nyilván a préseléskor) összefüggő rétegekké állnak össze, amely rétegek behálózzák az egész ellenállást. Mi itt csak annak megállapítására szorítkozhatunk, hogy az említett rétegződés teljes mértékben megmagyarázza a számítások paradox eredményét. A szénszemcsés ellenállások réteges struktúrájának felismeréséből kiindulva KATONA JÁNOS laboratórium-vezetőnek a Híradástechnikai Kutató Intézetben sikerült a gyártási eljárás módosításával finomabb struktúrájú szénszemcsés ellenállásokat készíteni. Azt tapasztalta, hogy e finomabb struktúrájú ellenállások vezetőképessége 2%—5% széntartalom esetében már valóban 0 volt, és pl. a 10^2 — 10^3 Ohm érték csak 14% széntartalomnál adódott. Ugyanakkor az új eljárással készített ellenállások szórása csökkent és javultak az ellenállás fizikai jellemzői (zajfeszültség, frekvencia- és feszültség-függőség, ellenállási hőmérséklet együttható, stb.). Így tehát az elmélet látszólagos ellentmondása a tapasztalattal segítséget nyújtott a szénszemcsés ellenállások struktúrájának megismeréséhez, amennyiben tüzetesebb kísérleti vizsgálatok elvégzésére ösztönözte a kutatókat, továbbá e vizsgálatok eredményeképpen lehetőséget adott új felismerésekre és ennek alapján az ellenállások minőségének javítására és szórásának csökkentésére.

A dolgozatban tárgyalt probléma gyakorlati jelentősége mellett tehát elvi érdekességgel is bír, mégpedig két szempontból is. Először is szép példája annak, hogy milyen jó szolgálatot tehet a valószínűségszámítás bizonyos technológiai problémáknál, klasszikus módszerekkel áttekinthetetlen struktúrájú

szemcsés anyagok fizikai tulajdonságainak vizsgálatánál. Másrészt érdekes példa arra, hogy a matematikai módszerek segítséget és ösztönzést nyújthatnak bizonyos kvalitatív összefüggések feltárásához is, az elméleti és tapasztalati adatok ellentmondása okainak felderítése útján. Tekintettel a kérdés elvi érdekességére és tanulságos voltára, a következőkben igyekszünk a kérdést oly módon tárgyalni, hogy a tárgyalás a lehető legkevesebb előismerettel megérthető legyen, és e felhasznált matematikai megfontolásokat olyan részletesen ismertetjük, hogy azokat a matematikában kevés gyakorlattal rendelkező olvasó is követni tudja.

A szénszemcséket a következőkben gömbalakúaknak tekintjük, azonban nem tesszük fel, hogy e gömbök egyforma nagyságúak. A megfontolásokban szerepet fog játszani a szemcsék átlagos sugara, amelyet \bar{r} -sal jelölünk, továbbá a szemcsesugár négyzetének átlaga, amelyet \bar{r}^2 -sal jelölünk, hasonlóképpen a szemcsesugár köbének átlaga, amelyet \bar{r}^3 -sal jelölünk. Ha $f(r)$ jelöli a gömbök sugara eloszlásának sűrűségfüggvényét, vagyis, ha feltesszük, hogy annak a valószínűsége, hogy egy találmra választott szemcse sugara r és $r + \Delta r$ közé essék (Δr -ben magasabbrendű tagoktól eltekintve) $f(r)\Delta r$, akkor

$$(1) \quad \bar{r} = \int_0^{\infty} r f(r) dr,$$

hasonlóképpen

$$(2) \quad \bar{r}^2 = \int_0^{\infty} r^2 f(r) dr$$

és

$$(3) \quad \bar{r}^3 = \int_0^{\infty} r^3 f(r) dr.$$

Nyilvánvaló, hogy ha \bar{v} jelenti az átlagos szemcséköbtartalmat, akkor

$$(4) \quad \bar{v} = \frac{4\pi}{3} \bar{r}^3.$$

(Megjegyzendő, hogy általában \bar{r}^3 nem egyenlő $(\bar{r})^3$ -nel, hasonlóképpen \bar{r}^2 nem egyenlő $(\bar{r})^2$ -nel. Ezek a mennyiségek akkor és csak akkor egyenlők, ha az összes gömbök egyenlő sugarúak. Így tehát csak ebben az esetben lesz az átlagos szemcséköbtartalom egyenlő az átlagos sugarú szemcse köbtartalmával.)

Ami az $f(r)$ sűrűségfüggvényt illeti, az jó közelítéssel lognormálisnak volna vehető, vagyis feltehetnénk, hogy

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma r} e^{-\frac{(\log \frac{r}{\mu})^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{ha } r > 0,$$

ahol μ és σ pozitív állandók. Ez a törvényszerűség lép fel ugyanis a legtöbb anyag szemcsenagyság szerinti eloszlásánál. A jelen dolgozatban közölt megfontolások azonban az $f(r)$ függvény konkrét jellegétől teljesen függetlenek, és bármely szemcsemegoszlás mellett érvényesek. Éppen ezért a következőkben nem is tesszük fel, hogy az $f(r)$ függvényt ismerjük.

Tegyük fel, hogy a szemcsék térfogati sűrűsége p , vagyis, hogy tetszőleges, egy átlagos nagyságú szemcséhez képest nagy kiterjedésű V térfogatú térrészben található szénszemcsék össztérfogatának várható értéke pV . Ha λ jelenti az egységnyi térfogatú térrészbe eső középpontú szemcsék számának várható értékét, és elhanyagolva azt a körülményt, hogy a V térfogatú térrész szélén elhelyezkedő szemcsék egy része kinyúlhat a vizsgált térrészből (ami gyakorlatilag lényegtelen, ha a vizsgált térrész pl. egy kocka, amelynek élhosszúsága nagyságrendekkel nagyobb az átlagos szemcsesugárnál), akkor

$$(5) \quad p = \lambda \bar{v} = \frac{4\pi\lambda}{3} \bar{r}^3.$$

A kapott adatok szerint p értéke az eddig ténylegesen használt kísérleti ellenálláspéldányoknál 0,02 és 0,05 közé esik, vagyis az ellenállások anyagának 2–5%-át teszik ki a szénszemcsék. Egy r_1 és egy r_2 sugarú szemcsét „szomszédosnak” fogunk nevezni, ha középpontjaik távolsága legfeljebb $r_1 + r_2 + \delta$, ahol $\delta > 0$ egy megadott állandó.¹⁾ Mint említettük, a szakemberek véleménye szerint δ kb. 3Å nagyságrendűnek veendő.

Jelölje most 2ν egy találmra választott szemcsével a fenti értelemben szomszédos szemcsék számának várható értékét. A ν szám nyilván az $f(r)$ eloszlástól (elsősorban annak \bar{r} középpértékétől), továbbá p -tól és δ -tól függ. Azzal a kérdéssel, hogy ν hogyan számítható ki, alább még foglalkozni fogunk. Egyelőre tegyük fel, hogy ν értékét már meghatároztuk és vizsgáljuk meg, hogy ez esetben hogyan határozható meg az ellenállás vezetőképessége. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az ellenállás téglalakú, amelynek két átellenes lapja egy-egy fémlappal érintkezik; vizsgáljuk az áram útját a két fémlap között. Vegyünk fel egy (x, y, z) koordinátarendszert, úgy, hogy az egyik fémlap a $z=0$ síkon fekszik, míg a másik, vele párhuzamos fémlap a $z=1$ síkon helyezkedik el. Szimmetria-okokból nyilvánvaló, hogy egy tetszőleges az ellenállás belsejében levő szemcsével „szomszédos” szemcsék közül azok számának várható értéke, amelyek középpontjának z -koordinátája nagyobb, illetve kisebb, mint a vizsgált szemcsé középpontjának z -koordinátája, ν -vel egyenlő. Vagyis ν -vel egyenlő a „felülről” érintkező szomszédos szemcsék átlagos száma, és hasonlóképpen ν -vel egyenlő az „alulról” érintkező szomszédos szemcsék átlagos száma is. Az áram terjedését a szénszemcsés ellenállásban a *láncreakciók* elmélete alapján tárgyaljuk. Első pillanatra ez meglepőnek tűnhet, azonban az analógia valójában igen kézenfekvő. Az áram nyilván eljut az alsó fémlappal szomszédos összes szénszemcsékre. Minden ilyen szemcséből továbbjut az áram az illető szemcsével „felülről” szomszédos szemcsékbe, amelyek száma szemcséről-szemcsére véletlenszerűen változik, csak e szám átlaga, ν ismeretes; ezen szemcsékből továbbjut az azokkal „felülről” szomszédos szemcsékbe, és így tovább. Azokon a szemcseláncokon keresztül, amelyek nem szakadnak meg, az áram eljut a felső fémlaphoz. A jelenség matematikai szempontból teljesen analóg bármely más láncreakcióval, pl. azzal, amely egy reaktorban megy végbe, ahol egy neutron elhasít egy atommagot, abból bizonyos számú neutron lép ki, ezek mind-egyike (meghatározott valószínűséggel) egy-egy újabb atommagot fog elhasítani, és így tovább. Lehetséges, hogy ez a lánc előbb-utóbb elakad, de lehet-

¹⁾ Elképzelhető volna olyan hipotézis is, hogy δ bizonyos mértékig függ r_1 -től és r_2 -től, azonban eredményeinken ez keveset változtatna, csak a számítás válna bonyolultabbá.

séges, hogy állandóan folytatódik. A mi esetünkben a lánc megszakadása azt jelenti, hogy az áram nem jut el az alsó fémlapról a felső fémlapra. A láncreakciók elméletéből (lásd pl. [3], 496—500. oldalak) ismeretes, hogy egy lánc megszakadásának valószínűsége 1-gyel egyenlő, vagyis bizonyosnak vehető, ha $\nu < 1$, míg a valószínűség 1-nél kisebb, ha $\nu > 1$; ez esetben annak a valószínűsége, hogy egy szemcse mind az alsó, mind pedig a felső fémlappal össze legyen kötve (vagyis folyják rajta keresztül áram)

$$(6) \quad W = (1 - w)^2,$$

ahol w azon feltevés mellett, hogy a szemcsék a Poisson-eloszlás szerint helyezkednek el, a

$$(7) \quad w = e^{\nu(w-1)}$$

egyenlet egyetlen 0 és 1 közé eső megoldása.²⁾ Az ellenállás vezetőképessége tehát 0-val egyenlő, ha $\nu < 1$, és pozitív, ha $\nu > 1$.

Vizsgáljuk most meg, hogyan függ ν értéke az $f(r)$ sűrűségfüggvényről, illetve annak bizonyos jellemző adataitól, továbbá a p és δ változóktól. Vegyük szemügyre egy r_1 sugarú P_1 középpontú szemcsét. Ez a szemcse feltevésünk szerint „szomszédos” mindazokkal az r_2 sugarú szemcsékkal, amelyek P_2 középpontja beleesik egy az r_1 sugarú gömb P_1 középpontja körüli $r_1 + r_2 + \delta$ sugarú gömbbe. Persze, ha P_2 a P_1 körüli $r_1 + r_2$ sugarú gömb belsejében van, akkor a két gömb egymásba hatol. Ha a gyártási folyamat során nem préselnék a szóbanforgó szénszemcsés ellenállásokat, akkor tehát azt kellene feltennünk, hogy a P_2 pont a P_1 pont körüli $r_1 + r_2$ és $r_1 + r_2 + \delta$ sugarú gömbök által alkotott gömbhéjban helyezkedik el. Mivel azonban a szénszemcsés ellenállások anyagát préselik, amelynek során az egyes szemcsék deformálódhatnak, sokkal realisabb megengedni, hogy P_2 bárhol elhelyezkedhessék a P_1 körüli $r_1 + r_2 + \delta$ sugárral rajzolt gömbön belül. (E feltevés egyébként, amennyiben az eredményt egyáltalán befolyásolja, csak abban nyilvánulhat meg, hogy a „szomszédok” átlagos számára vonatkozólag a valódinál egy kevéssel *nagyobb* értéket kapunk.) A mondottakból nyilvánvaló, hogy

$$(8) \quad 2\nu = \frac{4\pi\lambda}{3} \int_0^\infty \int_0^\infty (r_1 + r_2 + \delta)^3 f(r_1) f(r_2) dr_1 dr_2.$$

Elvégezve az integráljel alatt álló köbreemelést és tagonként integrálva adódik, hogy

$$(9) \quad 2\nu = \frac{4\pi\lambda}{3} (2\bar{r}^3 + 6\bar{r} \cdot \bar{r}^2 + 6\delta(\bar{r})^2 + \bar{r}^3) + 6\delta^2\bar{r} + \delta^3).$$

Figyelembe véve (5)-öt, következik, hogy bevezetve a

$$(10) \quad \mathcal{G}_1 = \frac{\bar{r} \cdot \bar{r}^2}{\bar{r}^3}, \quad \mathcal{G}_2 = \frac{(\bar{r})^3}{\bar{r}^3} \quad \text{és} \quad \eta = \frac{\delta}{\bar{r}}$$

²⁾ A (7) egyenlet w gyökét explicit alakban a következőképpen állíthatjuk elő:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu^{n-1} e^{-\nu} \nu^{n-1}}{n!} \quad (\nu > 1).$$

jelöléseket

$$(11) \quad \nu = p \left(1 + 3\vartheta_1 + 3(\vartheta_1 + \vartheta_2)\eta + 3\vartheta_2\eta^2 + \frac{1}{2}\vartheta_2\eta^3 \right).$$

Mármost, a jól ismert Hölder-féle egyenlőtlenség a $p=3$, $q=\frac{3}{2}$ esetben azt mondja, hogy

$$(12) \quad \left| \int_0^\infty a(r)b(r)dr \right| \leq \left(\int_0^\infty |a(r)|^3 dr \right)^{1/3} \cdot \left(\int_0^\infty |b(r)|^{3/2} dr \right)^{2/3}.$$

Alkalmazva (12)-t az $a(r)=f(r)^{1/3}$, $b(r)=f(r)^{2/3} \cdot r^2$ függvényekre és figyelembe véve, hogy

$$\int_0^\infty f(r)dr = 1,$$

kapjuk, hogy

$$(13) \quad \bar{r}^2 \leq (\bar{r}^3)^{2/3}.$$

Alkalmazva (12)-t az $a(r)=f(r)^{1/3}$, $b(r)=f(r)^{2/3} \cdot r$ függvényekre, kapjuk, hogy

$$(14) \quad \bar{r} \leq (\bar{r}^3)^{1/3}.$$

Összeszorozva (13)-at és (14)-et, adódik, hogy

$$(15) \quad \vartheta_1 \leq 1,$$

míg (14)-ből közvetlenül adódik, hogy

$$(16) \quad \vartheta_2 \leq 1,$$

(15) és (16) figyelembevételével kapjuk, hogy

$$(17) \quad \nu \leq p \left(4 + 6\eta + 3\eta^2 + \frac{\eta^3}{2} \right),$$

vagyis

$$(18) \quad \nu \leq \frac{p}{2} (2 + \eta)^3.$$

Ha $\eta \leq 1$, akkor (18)-ból

$$(19) \quad \nu \leq 14p,$$

tehát csak akkor lehet $\nu > 1$, ha $p > 1/14 \cong 0,07\dots$, míg a megadott adatok, vagyis $\eta \leq 1/100$ mellett csak akkor lehet $\nu > 1$, ha $p > 2/(2,01)^3 = 0,246\dots$. Ha tehát $\eta \approx 0,01$, akkor a szénnek a szénszemcsés ellenállás anyagának közel 25%-át, míg ha $\eta \approx 1$, legalább 7%-át kellene kitennie, míg a szén tényleges 2—5% térfogati sűrűsége esetében az ellenállás vezetőképeségére mindkét esetben 0 adódik. Mint említettük, a kísérletek azt mutatták, hogy finomabb struktúrája szénszemcsés ellenállások esetében (amelyekben a műanyag nem áll össze tömbökké) a tapasztalatok ezt igazolták. Az, hogy a dolgozat elején leírt gyártási eljárással készített ellenállások az elméletnek látszólag ellentmondó módon viselkednek, teljesen érthetővé válik, ha figyelembe vesszük, amit a mikroszkópikus felvételek megerősítettek, hogy szinte a teljes szén-

menntiség az ellenállás térfogatának egy törtrészét, pl. q -adrészét kitevő össz-térfogatú rétegekben helyezkedik el. Ez esetben ugyanis e rétegekben a szén relatív koncentrációja a tényleges koncentráció $1/q$ -szorososa lesz, és így azt kapjuk, hogy $\eta \approx 0,01$ mellett akkor lehetséges vezetés, ha $p/q > 0,246$, vagyis $p > 0,246 q$. Ily módon már a tapasztalatokkal teljesen összhangban álló eredményt kapunk. Némiképpen bonyolítja a helyzetet, hogy a valóságban q értéke nyilvánvalóan függ p értékétől. q reális értékét (illetve p -től való függését) kísérleti úton kell megállapítani, ami, bár nem könnyű, de elvégezhető feladat.

A fent közölt ν -re vonatkozó számítás lényegesen egyszerűsödik, ha az összes szemcséket egyenlő sugarú gömbökné tekintjük. Ha a szemcsék mind \bar{r} sugarú gömbök, akkor (8) helyett a

$$(8^*) \quad 2\nu = \frac{4\pi\lambda}{3} (2\bar{r} + \delta)^3 = p(2 + \eta)^3$$

összefüggés áll fenn, amiből könnyen következik, hogy ez esetben (18)-ban egyenlőség áll fenn. Ebből látszik, hogy az a hiba, amit akkor követünk el, ha 2ν értékét $p(2 + \eta)^3$ -nel helyettesítjük, pontosan azt jelenti, hogy elhanyagoljuk a részecskék sugarának szórását az átlagos részecskesugár körül. Ha tehát a részecskék egyforma sugarúak, csak akkor lesz $\nu > 1$, és így vezetés csak akkor lehetséges, ha $p > 2/(2 + \eta)^3$, tehát pl. $p = 0,02$ esetében csak akkor volna lehetséges vezetés, ha $\eta > 2,6$, másszóval 300 \AA sugarú szemcsék között akkor is fel kellene lépnie vezetésnek, ha a szemcsék távolsága 708 \AA volna, míg a valóban tapasztalható vezetőképesség megmagyarázására fel kellene tenni, hogy még nagyobb, kb. 1000 \AA távolságban levő szemcsék között is fellép vezetés. Ebből látszik, hogy a kapott paradox eredmények egyedül lehetséges magyarázata a szénszemcsék (valóban tapasztalt) nem egyenletes (réteges) elhelyezkedése amelyet, mint mondtunk a tapasztalatok is alátámasztanak (lásd a közölt fényképet).

Ami mármint azt a kérdést illeti, hogyan függ a vezetőképesség a szén koncentrációjától és a szénszemcsék átlagos nagyságától, ennek elméleti meghatározása meglehetősen bonyolult. Ugyanis, akár abban az esetben, ha a szénszemcsék rétegekben helyezkednek el, amelyeken belül relatív koncentrációjuk számottevő, akár abban az esetben, ha az ellenállás finomabb struktúrájú és a szénszemcsék nem tömörülnek rétegekbe, hanem egyenletesen oszlanak el, azonban a szén térfogataránya ennek megfelelően nagy, akkor már nem alkalmazhatók azok a közelítések, amelyek 2–5%-os koncentrációnál még megengedhetők voltak és amelyek lényegesen kihasználták a szénszemcsék ritka elhelyezkedését. Ilyen nagy koncentráció esetében ugyanis az egyes szénszemcsék helyzetei már egyáltalán nem tekinthetők egymástól függetleneknek, amit a fentiekben lényegesen kihasználtunk akkor, amikor a szemcséközéppontokra vonatkozólag azt tettük fel, hogy a Poisson-eloszlás szerint helyezkednek el. Ilyen nagy koncentráció mellett a szemcsék alakja is lényegessé válhat és igen kérdéses, hogy a valóságot leegyszerűsítő feltevés, hogy a szemcsék gömbalakúak (ami kis koncentráció mellett nyilvánvalóan megengedhető) érvényes-e. A vezetőképesség elméleti meghatározását további kísérleti vizsgálatoknak kell megelőznie, mert a megfelelő modell, csak ezek alapján állítható fel. E kérdésre, továbbá egyéb nyitott problémákra (pl. a gyártási szórás kiszámítására) bővebb kísérleti anyag birtokában vissza kívánunk térni.

Ezúton is köszönetet mondok KATONA JÁNOS laboratóriumvezetőnek, a dolgozat kézírata első fogalmazványának átnézése alkalmával tett értékes megjegyzéseiért, továbbá azért, hogy a szénszemcsés ellenállás metszetére vonatkozó fényképfelvételt volt szíves rendelkezésünkre bocsátani a dolgozatban való közlés céljából.

(Beérkezett: 1957. XII. 5.)

IRODALOM

- [1] KATONA J.: *Ellenállások vizsgálata*. Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1955. (3287. sz.)
- [2] KATONA J.: „Híradástechnikai és műszerteknikai ellenállások újabb fejlődési irányai—II.”. *Magyar Híradástechnika* (1956) 49—54. és 87—97.
- [3] RÉNYI A.: *Valószínűségszámítás*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.

ИССЛЕДОВАНИЕ УГОЛЬНОЗЕРНИСТОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

A. RÉNYI

Резюме

Работа сообщает об исследованиях, проведенных автором с помощью вероятностных методов, относительно проводимости таких сопротивлений, которые получаются спрессованием смеси угольной пыли и какого-нибудь изолирующего пылевидного вещества (например фенопласта). Как известно, такие сопротивления используются в радиотехнике. Распространение тока в таких сопротивлениях работа рассматривает как цепную реакцию. Расчеты основываются на предположении, что угольная пыль распределяется во всем проводнике с равномерной плотностью (по распределению Poisson-a). Полученные численные данные находились в вопиющем противоречии с экспериментальными данными. Поэтому J. KATONA (Промышленно—Исследовательский Институт Техники связи) подробно исследовал микроструктуру указанных сопротивлений. Микроскопические снимки (один из которых публикуется в работе) указали на причину противоречия между теорией и фактами. Оказывается, угольные зерна распределяются не равномерно, а концентрируются в тонких слоях. Это дало возможность улучшить качество этих сопротивлений. Математическую теорию данных сопротивлений автор собирается развить в одной из последующих работ.

INVESTIGATION BY MEANS OF PROBABILITY THEORY OF THE CONDUCTIVITY OF CERTAIN RESISTANCES

A. RÉNYI

Summary

Account is given of some probabilistic considerations concerning the conductivity of resistances which are manufactured by pressing the mixture of carbon-powder with the powder of some non-conducting material (e. g. phenoplast). Such resistances are as it is well known, used in radiotechnics. The propagation of the current in the resistance mentioned above is considered as a chain reaction. The calculations have been carried out under the supposition that the carbon-powder is distributed with uniform density (according to Poisson's law) in the whole body of the resistances. The numerical results were in striking contradiction with the experimental facts. This has led MR. J. KATONA (of the Industrial Research Institute for Telecommunication) to investigate the microstructure of the mentioned resistances. The microscopic pictures (one of which is reproduced in the present paper) have thrown light on the reason of the contradiction between theory and facts, as they have shown that the carbon-powder is not uniformly distributed, but is contained in thin layers. This observation gave a possibility to improve the quality of the mentioned resistances. The mathematical theory of the resistances in question will be followed up further in a forthcoming paper.

**A MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZET SZEMINÁRIUMAIBAN
1957-BEN ELHANGZOTT ELŐADÁSOK
KIVONATAI**

Intézeti szeminárium

1. ST. SCHWARTZ :¹⁾ *Mértékek topológikus félcsoportokban.* (Szeptember 25.)

2. EGERVÁRY JENŐ: *Purcell vektormódszerének egy általánosításáról.* (November 22.) A Bolyai János Matematikai Társulattal közösen rendezett előadás.

A *Journal of Mathematics and Physics* 1953-as kötetében (180—183. oldalakon) E. PURCELL reguláris inhomogén egyenletrendszerek megoldására egy — az eddig ismertektől eltérő — módszert közölt, mely lényegileg vetítések segítségével állítja elő a megoldást.

Az előadó kimutatta, hogy az általa bevezetett és más esetekben is alkalmazott rangcsökkentő műveletek felhasználásával megadható egy olyan megoldási módszer, amely bármilyen lineáris egyenletrendszer esetén kivétel nélkül alkalmazható és a Purcell-féle „vektormódszert” mint speciális esetet tartalmazza.

Kiindulva a teljes vektorteret szimbolizáló egységmatrixból, a megoldandó rendszer egyenleteit szukcesszive egy-egy rangcsökkentő művelettel elégítjük ki, az összes egyenletek kielégítése után megmaradó matrix valamennyi oszlopvektora az adott rendszernek egy-egy megoldása. A módszernél fellépő szabad paraméterek megfelelő választásával elérhető, hogy a végeredményként nyert matrix el nem tűnő oszlopai az adott rendszernek egy teljes lineárisan független megoldási rendszerét adják.

A módszer azokat az egyenleteket, melyek a megelőzőknek lineáris következményei, automatikusan eliminálja.

3. V. G. AVAKUMOVIC²⁾: *Eigenfunktionen und Fourier-Reihen auf kompakten Mannigfaltigkeiten.*

A „matrixelmélet és alkalmazásai” osztály szemináriuma

JUNG GITTA³⁾: *A matrix-számítás alkalmazása desztillációs kolunák szerkesztésére.* (Április 2.)

¹⁾ Bratislava.

²⁾ Novi Sad—Göttingen.

³⁾ Chinoin Gyógyszervegyészeti Gyár, Budapest.

Lásd JUNG G., RÓZSA P. és SÁRKÁNY Gy. „Ellenáramú szétválasztó vegyipari alpműveletek elméleti fokozatszámának meghatározásáról” című dolgozatát e *Közlemények* jelen kötetének 227—245. oldalain.

A valószínűségszámítási és a matematikai statisztikai osztályok közös szemináriuma

1. TAKÁCS LAJOS: *Tartózkodási-idő problémákról.* (Január 3.)

Lásd az előadó „On certain soujourn time problems in the theory of stochastic processes” című dolgozatát [*Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **8** (1957) 169—191.].

2. PRÉKOPA ANDRÁS⁴⁾: *Független növekményű homogén sztochasztikus folyamatok kanonikus felbontásáról.* (Január 10.)

A ξ_t sztochasztikus folyamat rendelkezze a következő tulajdonságokkal:

1°. ξ_t független növekményű,

2°. ξ_t homogén,

3°. a ξ_t sztochasztikus folyamatnál az ugrások abszolút értékének összege 1 valószínűséggel véges.

4°. ξ_t mintafüggvényei balról folytonosak.

Ekkor a ξ_t folyamat felírható a

$$\xi_t = \zeta_t + \eta_t$$

alakban, ahol ζ_t Brown-mozgás folyamat, az η_t folyamat pedig tisztán diszkontinuus, és az η_t folyamat karakterisztikus függvénye logaritmusának Lévy-féle alakjában az $M(x, t)$, illetőleg $N(x, t)$ függvény egyenlő $tM(x)$ -szel, illetőleg $tN(x)$ -szel, ahol $M(x)$, illetőleg $N(x)$ az ugrások várható száma a $(-\infty, x)$, $(x < 0)$, illetőleg az $(x, +\infty)$, $(x > 0)$ intervallumban.

A bizonyítás RÉNYI ALFRÉD és PRÉKOPA ANDRÁS egy tételén alapszik. Lásd e szerzők „On the independence in the limit of sums depending on the same sequence of independent random variables” című dolgozatát [*Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **7** (1957) 319—326.].

Hasonló módszerrel lehet tárgyalni az általános esetet is, amikor a 3°. követelményt elhagyjuk. Így K. ITO eredményeinek egy más bizonyítását kapjuk [K. ITO “On stochastic processes, I.” *Japanese Journal of Mathematics* **18** (1942) 261—301.].

3. FISCHER JÁNOS: *Gömb- és ellipszoidalakú testek térfogatának becslése metszetből.* (Január 17. és 24., továbbá október 31.)

Sejtmagmérésekkel kapcsolatosan merül fel a párhuzamos síkokkal határolt metszetben elhelyezkedő logaritmikusan normális eloszlású gömbök, illetőleg forgási ellipszoidok metszési, illetőleg vetítési torzításának korrekciója. Az előadás főként a gömbök esetével és azon belül a térfogat logaritmus várható értékének és szórásnégyzetének becslésekor szükséges korrekcióval foglalkozott. Ismertette a problémával kapcsolatban kidolgozott nomogramokat és a továbbiakban felvetődő valószínűségszámítási, hisztológiai és nomográfiai problémákat is.

⁴⁾ Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Matematikai Intézet.

4. JÁNOSSY LAJOS⁵⁾: *Egy fizikai problémáról* (Január 31.).

5. RÉNYI ALFRÉD: *Az $L(z)$ függvény integrálegelőállításáról*. (Február 7.)
Lásd az előadó „Az $L(z)$ valószínűség-eloszlásfüggvényről” című dolgozatát a *Közlemények* jelen kötetének 43—50. oldalain.

6. CSÁKI ENDRE⁶⁾: *Referáló előadás*. (Február 10. és 17.)

M. KAC „Random walk and the theory of Brownian motion” című dolgozatának ismertetése [*Selected papers on noise and stochastic processes*. Dover, New York, 1954, pp. 295—317.].

7. PÁL LÉNÁRD⁵⁾: *Atomreaktorok sztochasztikus folyamatainak elméletéről* (Február 14.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát a *Magyar Tudományos Akadémia Központi Fizikai Kutató Intézetének Közleményeiben* [4 (1956) 584—618.].

8. RÉNYI ALFRÉD: *Véletlen tagszámú valószínűségi változókból álló összegek határeloszlásáról*. (Február 21.)

Lásd az előadó „On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables” című dolgozatát [*Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 8 (1957) 193—201.].

9. RÉVÉSZ PÁL⁴⁾: *Valószínűségi változók sorozatainak konvergenciájáról*. (Február 28.)

Lásd az előadó „On the convergence of sequences of random variables (A remark on a problem of A. Prékopa)” című cikkét a *Közlemények* jelen kötetének 51—58. oldalain.

10. *Az 1956. évi Schweitzer Miklós matematikai emléktverseny feladatainak megvitatása*. (Március 4.)

11. MOGYORÓDI JÓZSEF: *Referáló előadás*. (Március 7.)

P. П. Добрушин „Лемма о пределе сложной случайной функции” [*Успехи Математических Наук* 10:2 (1955) 157—159.] című dolgozatának ismertetése.

12. PRÉKOPA ANDRÁS: *Az általánosított összetett Poisson eloszlásról és annak alkalmazásairól határeloszlástételekre és független növekményű folyamatok esetére*. (Március 14. és 21.)

Lásd az előadó „On the compound Poisson distribution” című dolgozatát [*Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 18 (1957) 23—28.].

13. ARATÓ MÁTYÁS: *Referáló előadás*. (Március 21.)

И. А. Ибрагимов „О композиции одновершинных распределений” [*Теория Вероятностей и её Применения* 1 (1956) 283—288.] című dolgozatának ismertetése.

14. RÓZSA PÁL: *A matrixelmélet bizonyos valószínűségyszámítási alkalmazásairól*. (Március 24.)

Az előadó bizonyos matrixelméleti eredményeit hasonlítja össze M. KAC „Random walk and the theory of Brownian motion” című dolgozatában

⁵⁾ Központi Fizikai Kutató Intézet.

⁶⁾ Alkalmazott matematika szakos egyetemi hallgató.

[*Selected papers on noise and stochastic processes*. Dover, New York, 1954. pp. 295—317] található eredményekkel. Lásd az előadó „Megjegyzések egy sztochasztikus matrix spektrálfelbontásához” című dolgozatát [*Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 7 (1957) 199—206.].

15. TANKÓ JÓZSEF⁶⁾: *A karakterisztikus funkcionálról.* (Április 29. és május 6.)

A. N. Kolmogoroff „La transformation de Laplace dans les espaces linéaires” [*Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Académie des Sciences (Paris)* 200 (1935) 1717—1718.] és E. MOURIER „Propriétés des caractéristiques d'un élément aléatoire dans un espace de Banach” [*Comptes Rendus Hebdomadaires de l'Académie des Sciences (Paris)* 231 (1950) 28—30.] című dolgozatának ismertetése.

16. RÉVÉSZ PÁL: *Szakedolgozatának ismertetése.* (Május 9. és 16.)

Lásd az előadó „On the limit distribution of sums of dependent random variables” [*Annales Universitatis Scientiarum Budapestiensis de Rolando Eötvös Nominatae (Sectio Mathematica)* 1 (1957) (sajtó alatt)] című dolgozatát.

17. OTTO HANŠ⁷⁾: *On generalized random variables.* (Május 23.)

Let Γ be a partially ordered set, X a non-empty set and φ and ψ two mappings of Γ into the space of all subsets of X , satisfying the following conditions: if $\gamma_1 < \gamma_2$ then $\varphi(\gamma_2) \subset \varphi(\gamma_1)$; if $\gamma_1 < \gamma_2$ then $\psi(\gamma_2) \subset \psi(\gamma_1)$; $\varphi(\gamma) \subset \psi(\gamma)$ for every $\gamma \in \Gamma$; if $x_0 \in X$, $\gamma_0 \in \Gamma$, and $x_0 \notin \varphi(\gamma_0)$ then there exists a $\gamma_1 \in \Gamma$ so that $\gamma_1 < \gamma_0$ and $x_0 \notin \bigcup_{\gamma < \gamma_1} \varphi(\gamma)$.

An element $\gamma_0 \in \Gamma$ is said to be φ -regular if for every $\gamma_1 < \gamma_0$ there holds $\bigcup_{\gamma < \gamma_1} \varphi(\gamma) \neq \emptyset$.

It will be said that ψ φ -separates $\gamma_0 \in \Gamma$ from $x_0 \in X$ if for every $x_1 \neq x_0$, $x_1 \in \bigcup_{\gamma < \gamma_0} \varphi(\gamma)$ and for every $\gamma_1 < \gamma_0$, $x_0 \in \psi(\gamma_1)$ there holds at least one from the following two statements: $x_0 \in \varphi(\gamma_1)$, $x_1 \notin \psi(\gamma_1)$. Further on, ψ φ -separates γ_0 from $A \subset X$ if it φ -separates γ_0 from every $x \in A$.

Theorem 1. Let $\gamma_0 \in \Gamma$, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ and let ψ φ -separate γ_0 from A . Then $A \subset \varphi(\gamma_0)$ if, and only if, γ_0 is φ -regular and simultaneously $A \subset \psi(\gamma_0)$.

If ψ maps Γ into the space of all at most one-point subsets of X then ψ always φ -separates an arbitrary $\gamma_0 \in \Gamma$ from an arbitrary $x_0 \in X$. Therefore, in this special case, the theorem reads:

Theorem 2. Let $\gamma_0 \in \Gamma$, $x_0 \in X$ and let for every $\gamma \in \Gamma$ the set $\psi(\gamma)$ contain at most one point. Then $\{x_0\} = \varphi(\gamma_0)$ if, and only if, γ_0 is φ -regular and simultaneously $\{x_0\} = \psi(\gamma_0)$.

We shall roughly sketch how to apply particular notions e.g. to generalized random variables: Γ is the space of all sequences of elements from X , $\gamma_1 < \gamma_0$ means γ_1 is a subsequence of γ_0 , φ and ψ are two convergences on X , γ_0 is φ -regular means the set of points forming the sequence γ_0 is φ -compact. Thus theorems are obtained about almost sure convergence of

⁷⁾ A Csehszlovák Tudományos Akadémia Elektrotechnikai és Rádiótechnikai Intézete, Prága.

generalized random variables as for example theorems 13—44 in the paper O. HANŠ: „Generalized random variables” [Transactions of the 1st Prague Conference 1956, Prague, 1957, pp. 61—103.].

18. PERGEL JÓZSEF⁽⁶⁾: Referáló előadás. (Május 13. és 20.)

Az előadó az alábbi dolgozatokat ismertette: K. FLOREK, E. MARCZEWSKI, C. RYLL-NARDZEWSKI: „Remarks on Poisson processes, I.” [Studia Mathematica **13** (1952) 122—129], E. MARCZEWSKI: „Remarks on Poisson processes, II.” [Studia Mathematica **13** (1952) 130—136.], JÁNOSY LAJOS, RÉNYI ALFRÉD és ACZÉL JÁNOS: „On composed Poisson distributions, I.” [Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae **1** (1950) 209—224.], RÉNYI ALFRÉD: „On composed Poisson distributions, II.” [Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungariae **2** (1951) 83—96.].

19. MOGYORÓDI JÓZSEF: Véletlen tagszámú valószínűségi változókból álló összegek határeloszlástételei és momentumai. (Május 30. és június 6.)

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ független valószínűségi változók, melyeknek létezik a várható értékük és szórásuk, $M(\xi_n) = a_n$ és $D^2(\xi_n) = D_n^2$, legyen

továbbá $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ és $S_n^2 = \sum_{k=1}^n D_k^2$. A

$$\zeta_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - A_n}{S_n}$$

valószínűségi változókra teljesüljön a centrális határeloszlástétel. Legyen továbbá v_n ($n = 1, 2, \dots$) pozitív egész értékeket felvevő valószínűségi változókból álló sorozat és v_n/n konvergáljon sztochasztikusan az $a > 0$ értékhez. Az előadó bebizonyította, hogy annak elégséges feltétele, hogy a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\zeta_{v_n} < x\} = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

határeloszlástétel teljesüljön, az, hogy $S_n = n^\lambda L(n)$ alakú legyen, ahol $\lambda > 0$ szám, $L(n)$ pedig ún. lassú ingadozású függvény, azaz $L(cn)/L(n) \rightarrow 1$, ha $n \rightarrow \infty$ és $c > 0$.

20. CSÁKI PÉTER: Referáló előadás. (Május 27. és június 2.)

Az előadó az alábbi dolgozatokat ismertette: D. G. KENDALL: „Some problems in the theory of queues” [Journal of the Royal Statistical Society, Series B, **13** (1951) 151—173.], A. Я. ХИНЧИН: „Математические методы теории массового обслуживания” [Труды Математического Института имени В. А. Стеклова **49** (1955)] és TAKÁCS LAJOS: „Várakozási idő problémák tárgyalása Markov folyamatok segítségével” [A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei **4** (1954) 543—570.].

21. MOLNÁR ENDRE⁽⁶⁾: Referáló előadás. (Június 10.)

Az előadó ismertette a „Теория передачи электрических сигналов при наличии помех” [Издательство Иностранной Литературы, Москва, 1953.] című cikkgyűjtemény egyes részleteit.

22. PERGEL JÓZSEF: Nem független mértékterek szorzatáról. (Október 10.)

Legyen Ω_1 és Ω_2 két halmaz, S_1 az Ω_1 bizonyos részhalmazainak, S_2 pedig az Ω_2 bizonyos részhalmazainak egy σ -gyűrűje. Ha a $P(A, B)$ halmazfüggvény ($A \in S_1, B \in S_2$) rögzített A esetén mérték az S_2 σ -gyűrűn, rögzített B esetén pedig mérték az S_1 σ -gyűrűn, akkor $P(A, B)$ az $A \times B$ alakú halmazok által definiált σ -gyűrűn egy mértéket generál, hacsak Ω_1 és Ω_2 lokálisan kompakt Hausdorff terek és $P(\Omega_1, B)$ továbbá $P(A, \Omega_2)$ korlátos és reguláris mértékek. Az előadó példával bizonyítja, hogy általános esetben ez a tétel nem igaz. [Lásd pl.: E. MARCZEWSKI—C. RYLL-NARDZEWSKI: „Remarks on the compactness and non direct products of measures.” *Fundamenta Mathematicae* **40** (1953) 165—170.]

23. RÉVÉSZ PÁL: Referáló előadás. (Október 17.)

Az előadó a martingálelmélet elemeit ismertette J. L. DOOB „*Stochastic processes*” [Wiley New-York, 1953] című könyvéből.

24. MOGYORÓDI JÓZSEF: Referáló előadás. (Október 14.)

Az előadó az alábbi dolgozatokat ismertette: A. H. КОЛМОГОРОВ—Ю. В. ПРОХОРОВ: „О суммах случайного числа случайных слагаемых” [Успехи Математических Наук **4:4** (1949) 168—172.], И. Сейц, К. Винкельбауер: „Заметка к статье Колмогорова и Прохорова »О суммах случайного числа случайных слагаемых«” [Чехословацкий Математический Журнал **3/78** (1953) 91—93.], К. Винкельбауер: „Моменты для сумм случайного числа случайных слагаемых” [Чехословацкий Математический Журнал **3/78** (1953) 93—98.].

A matematikai statisztikai osztály szemináriuma**1. SARKADI KÁROLY: Referáló előadás. (Január 11.)**

Az előadó A. COHEN „Censored samples from truncated normal distributions” című dolgozatát ismertette [Biometrika **42** (1955) 516—519.].

2. ÉLTETŐ ÖDÖN: Referáló előadás. (Január 11.)

Az előadó J. E. JACKSON—E. L. ROSS „Extended tables for use with the »G« test for means” című dolgozatát ismertette [Journal of the American Statistical Association **50** (1955) 415—433.].

3. SARKADI KÁROLY: A Behrens—Fisher probléma. (Január 17.)
Ismertető előadás.**4. ÉLTETŐ ÖDÖN: Referáló előadás. (Január 23.)**

Az előadó J. JUNG „On linear estimates defined by a continuous weight function” című dolgozatát ismertette [Arkiv för Matematik **3** (1956)].

5. SARKADI KÁROLY: Referáló előadás. (Február 6.)

Az előadó L. GUTTMAN „Image theory for the structure of quantitative variates” című dolgozatát ismertette [Psychometrika **18** (1953) 277—296.].

6. ÉLTETŐ ÖDÖN: Referáló előadás. (Február 20.)

Az előadó a következő cikkeket ismertette: A. A. Зингер: „О независимых выборках из нормальной собокупности” [Успехи Математических Наук **6:6** (1951) 172—175.]; R. G. LANH: „On a characterization of the stable law with finite expectation” [Annals of Mathematical Statistics **27** (1956) 187—195].

7. VINCZE ISTVÁN: *Két minta összehasonlítása két statisztikai függvény alapján.* (Március 13.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát a *Közlemények* jelen kötetének 183—209. oldalán.

8. SARKADI KÁROLY: *Referáló előadás.* (Március 20.)

Az előadó J. O. IRWIN „A distribution arising in the study of infectious diseases” című dolgozatát ismertette [*Biometrika* **41** (1954) 266—268].

9. VINCZE ISTVÁN: *Referáló előadás.* (Március 26.)

Az előadó M. N. BHATTACHARYYA „Estimation from censored bivariate samples” című dolgozatát ismertette [*Journal of Agricultural Statistics* (1954) 83—92.].

10. LIPTÁK TAMÁS: *Referáló előadás.* (Május 30.)

Az előadó A. WALD „Note on the consistency of the maximum likelihood estimate” című dolgozatát ismertette. [*Annals of Mathematical Statistics* **20** (1949) 595—601].

11. LIPTÁK TAMÁS: *A hipotézisvizsgálat és a statisztikai döntésfüggvények elmélete.* (Június 6.)

Ismertető előadás.

12. RÓZSA PÁL: *Mátrixok és kvadratikus alakok.* (Október 31. és november 7.)

Ismertető előadás.

13. SARKADI KÁROLY: *Beszámoló a hágai nemzetközi szabványügyi konferenciáról.* (November 14.)

14. ÉLTETŐ ÖDÖN, LIPTÁK TAMÁS, SARKADI KÁROLY, SCHNELL LÁSZLÓNÉ és ZIERMANN MARGIT: *Referáló előadások.* (Áprilistól hetenként.)

Az előadók L. SCHMETTERER „Einführung in die Mathematische Statistik” című könyvének (Springer, Wien, 1956.) első hat fejezetét ismertették.

A numerikus és grafikus módszerek osztályának szemináriuma

1. SÁNDOR FERENC: *Digitális számológépek programozása.* (Január 8. és június 25. között hetenként.)

2. SÁNDOR FERENC irányításával: *Programkészítő szeminárium.* (November 5., december 3., 10. és 17., folyamatosan.)

A valós függvénytan osztály szemináriuma

1. CSÁSZÁR ÁKOS folytatta „A halmazelméleti topológia alapvonalai” című heti kétórás előadásait. Az év folyamán összesen 27 előadás hangzott el.

2. CZIPSZER JÁNOS és FREUD GÉZA: *Függvény deriváltjainak approximációja a függvényt approximáló polinomok deriváltjaival, II.* (Június 17. A Bolyai János Matematikai Társulattal közösen rendezett előadás.)

Lásd az előadók sajtó alatt lévő dolgozatát: „Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses dérivées successives par un polynôme trigonométrique et par ses dérivées successives” [*Acta Mathematica* **99** (1958)].

3. FREUD GÉZA: *Megjegyzés a Cantor—Bendixson-tételhez.* (Október 19.)

Legyen \mathfrak{M} egy R T_1 -topológikus tér bizonyos részhalmazaiából álló örökletes és additív halmazrendszer. Egy $A \subset R$ halmaz \mathfrak{M} -deriváltján azon x pontok halmazát értjük, amelyeknek tetszőleges U_x környezetére $A \cap U_x - \{x\} \notin \mathfrak{M}$. Ez a derivált-fogalom R -ben egy új T_1 -topológiát indukál, amelyet \mathfrak{M} -topológiának nevezünk. Ha \mathfrak{M} megszámlálhatóan additív, és R megszámlálható bázisú, akkor igaz a következő tétel: *Minden \mathfrak{M} -zárt halmaz egy \mathfrak{M} -perfekt halmaz és egy \mathfrak{M} -hoz tartozó halmaz egyesítése.* Ha \mathfrak{M} megszámlálható halmazok összességét jelenti, akkor ez a tétel az eredeti topológikus térre vonatkozó Cantor—Bendixson tétellel ekvivalens.

4. ALEXITS GYÖRGY: *Egy megjegyzés a teljes metrikus terekkel kapcsolatban.* (November 2.)

Legyen P egy olyan tulajdonság, hogy ha egy metrikus halmaz rendelkezik \mathcal{P} -vel, akkor minden nyílt részhalmaza is rendelkezik vele. Ha X teljes metrikus tér és előállítható megszámlálható sok, a P tulajdonsággal rendelkező zárt halmaz egyesítéseként, akkor azok a pontok, amelyekben X lokálisan nem- P tulajdonságú, első kategóriájú halmazt alkotnak. Az előadó felhívja a figyelmet arra, hogy néhány konkrét metrizációs és összefüggési tulajdonság esetén érdekes volna a fenti állítás megfordításának a lehetőségét megvizsgálni.

5. CZIPSZER JÁNOS: *Az ív görbeelméleti jellemzése.* (December 7.)

Az előadó új bizonyítást közölt a következő ismert tételre: Ha R legfeljebb másodrendű pontokkal rendelkező, összefüggő topológikus tér, és R -nek van két elsőrendű a és b pontja, akkor R egy \widehat{ab} ív.

6. CSÁSZÁR ÁKOS: *Az ív, egyenes, a félegyenes és a kör görbeelméleti jellemzése.* (December 7. és 14.)

Az előadó új bizonyítást közölt a következő ismert tételre: Ha R legfeljebb másodrendű pontokból álló, összefüggő, szeparábilis, legalább két pontot tartalmazó metrikus tér, akkor R vagy egy zárt intervallummal, vagy egy egyenessel, vagy egy zárt félegyenessel, vagy egy körvonallal homeomorf.

7. GEHÉR LÁSZLÓ: *Lipschitz-feltételt kielégítő és folytonos transzformációk kiterjesztése.* (December 10. A funkcionálanalízis-osztállyal közös rendezésben.)

Egy metrikus tér hiperkonvex, ha teljesül a következő feltétel: Akárhány zárt gömb közös része nem üres, ha bármely két gömb középpontjának a távolsága nem nagyobb a sugarak összegénél. Az előadó a következő tételekről számolt be:

1°. Ha f egy X metrikus teret egyenletesen folytonosan, illetőleg folytonosan képez le egy R hiperkonvex metrikus térbe, akkor tetszőleges pontossággal egyenletesen approximálható X -et R -be leképező Lipschitz-feltételt kielégítő, illetőleg minden pontban Lipschitz-feltételt kielégítő transzformációkkal.

2°. Ha f egy X metrikus tér egy A zárt részhalmazát egy korlátos hiperkonvex metrikus térbe képezi le, és f az A minden pontjában Lipschitz-feltételnek tesz eleget, akkor f kiterjeszthető X -re úgy, hogy a kiterjesztett függvény X minden pontjában Lipschitz-feltételnek tegyen eleget.

3°. Ha az előző tételben a Lipschitz-feltétel helyett azt tesszük fel, hogy f folytonos, akkor f folytonosan kiterjeszthető X -re.

A differenciálegyenletek osztályának szemináriuma

1. ADLER GYÖRGY, HAJTMANN BÉLA, SALLAY MELÁNIA és ZIMÁNYI JÓZSEFNÉ: *Referáló előadássorozat.* (Január 3. és 10., március 7., 14., 21. és 28., április 11., 18. és 25., május 9., 16. és 23., október 22., november 5., 12. és 19., december 3.)

Az előadók S. BERGMANN—M. SCHIFFER „*Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics*” című könyvének (Academic Press, New York, 1953.) egyes részeit ismertették.

2. BÉKÉSSY ANDRÁS: *A Laplace-módszer egy általánosítása.* (Január 17. és 24.)

Lásd az előadó hasonló című dolgozatát e *Közlemények* jelen kötetének 105—125. oldalain.

3. CSÁSZÁR ÁKOS: *A vektoranalízis integráltételeiről.* (Január 31., február 7., 14., 21. és 28.)

Az előadó ismertette a Gauss- és Stokes-féle tételnek a valós függvénytan segédeszközeivel történő bizonyítását az O. HAUPT—G. AUMANN *Differential- und Integralrechnung* című munkában (de Gruyter, Berlin, 1938.) található módszerrel, valamint ismertette a bizonyításhoz szükséges segédeszközöket (Rademacher tétel, többszörös Lebesgue-integrálok transzformáció-tétele, korlátos nyújtású parametrizálással előállított felületdarab felszínének elmélete, többváltozós függvények polinomokkal való megközelítésére vonatkozó approximáció-tétel).

4. FELDMANN LÁSZLÓ: *Az operátorszámítás Mikusiński-féle megalapozásáról.* (Október 10. és 15.)

Az előadó ismertette J. MIKUSIŃSKI „*Rachunek operatorów*” című könyvében (Polskie Towarzystwo Matematyczne, Warszawa, 1953) szereplő alapfogalmakat, és ezek egy lehetséges általánosítására vonatkozó megjegyzéseket tett.

5. MAKAI ENDRE: *Membránok alaphangjának frekvenciája.* (Október 29.)

Az előadó bebizonyította, hogy egy T területű és K összkörületű, peremén befogott, egyszeresen vagy kétszeresen összefüggő membrán alaphangjának λ frekvenciája kisebb a $3K/T$ mennyiségnél, ha a megfelelő sajátfüggvény a $\Delta u + \lambda^2 u = 0$ differenciálegyenletnek tesz eleget.

6. FÉNYES TAMÁS: *A Schwinger-féle variációs módszer.* (November 26.)

Az előadó ismertette F. E. BORGNIS—CH. H. PAPAS „*Randwertprobleme der Mikrowellenphysik*” című könyve (Springer, Berlin, 1955.) alapján a Schwinger-féle variációs módszert és annak elektrodinamikai alkalmazásait.

7. BOGNÁR JÁNOS: *Referáló előadás.* (December 10. és 17.)

Az előadó A. PLEIJEL „*Propriétés asymptotiques des fonctions et valeurs propres de certains problèmes de vibrations*” című cikkét ismertette [*Arkiv för Matematik Astronomi och Fysik* **27** A (1940) 1—100.].

A komplex-függvénytani osztály szemináriuma

1. ADLER GYÖRGY, FREUD GÉZA és SZÜSZ PÉTER: *Referáló előadás-sorozat.* (Január 2., 9., 14., 21. és 28., február 4., 11., 18. és 25., március 4., 11. és 18., április 1., 8., 15. és 29., május 2., 6. és 27.)

Az előadók S. BERGMANN „*Kernel functions*” című könyvének tavaly megkezdett ismertetését fejezték be.

2. BALÁZS JÁNOS: *A transzfinit átmérő.* (Május 30., június 3., október 4., 7. és 18., november 8., 15. és 22.)
Ismertető előadássorozat.

3. FREUD GÉZA: *Kolmogorov egy tételéről.* (Június 10.)
Ismertető előadás.

4. TURÁN PÁL: *Egy különös divergenciajelenség a konvergencia-kör területén.* (November 29.)

Az előadó HARDY, LITTLEWOOD és CARLEMAN bizonyos tételeinek kiegészítéseképpen azon tényt mutatja meg, hogy egy tetszőleges, a $0 < |z_0| < 1$ egyenlőtlenségnek eleget tevő z_0 -hoz található olyan

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

hatványsor, hogy $\sum a_n$ konvergens, de az

$$f\left(\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}\right) = \sum b_n z^n$$

sorra a

$$\sum_0^{\infty} b_n \left(\frac{1+z_0}{1+\bar{z}_0}\right)^n$$

sor divergens. Az előadó rámutat néhány ezzel kapcsolatos további kérdésre.

5. ALPÁR LÁSZLÓ: *A Robin-állandó.* (December 13., 21., 27.)
Ismertető előadássorozat.

A funkcionálanalízis-osztály szemináriuma

1. TANDORI KÁROLY⁸⁾: *Differenciálegyenletek Green-függvényei mint disztribúciók.* (Január 9.)

Ismertető előadás.

2. BERKES JENŐ⁹⁾: *Kvantum-térelmélet (Konfigurációs előállítás).* (Január 16.)
Ismertető előadás.

3. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Második kvantálás.* (Február 6.)

4. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Emissziós és abszorpciós operátorok* (Febr. 13.)

5. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *Felcserélési relációk az emissziós és abszorpciós operátorokra.* (Február 20.)

⁸⁾ Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet.

⁹⁾ Pedagógiai Főiskola, Szeged.

A 3.—5. előadások referáló jellegűek K. O. FRIEDRICHS „*Mathematical aspects of the quantum theory of fields*” című könyve alapján (Interscience Publishing Company, New York, 1953).

6. KOVÁCS ISTVÁN⁸⁾: *A második kvantálás matematikai megalapozása.* (Február 27., március 6.)

Ismertető előadás.

7. SZERÉNYI TIBOR⁸⁾: *Nyom-operátorok.* (Március 20.)

Ismertető előadás K. O. FRIEDRICHS „*Mathematical aspects of the quantum theory of fields*” című könyve alapján.

8. TANDORI KÁROLY⁸⁾: *Implicit disztribúciók.* (Április 10. és 17.)

Ismertető előadás.

9. TANDORI KÁROLY: *A $(\square + m^2)G = 0$ egyenlet Lorentz-invariáns disztribúció megoldása.* (Április 24.)

Ismertető előadás.

10. HORVÁTH JÁNOS¹⁰⁾: *Tomonaga elmélete.* (Május 8. és 15.)

Ismertető előadás.

11. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *A perturbáció formalizmusa.* (Szeptember 17.)

Lásd: RELICH „*Perturbation theory of eigenvalue problems*”. Litografált jegyzet, New York, 1953.

12. SZERÉNYI TIBOR¹¹⁾: *Példák a perturbáció-számításra rezgő hűrok és pálcák elméletéből.* (Október 2.)

13. KOVÁCS ISTVÁN: *Egy nem-reguláris perturbációprobléma* (Október 9.)

14. GILDE FERENC¹⁰⁾: *A csoportelőállítások szerepe a kvantummechanikában* (Október 16. és 23.)

Lásd: E. WIGNER „*Gruppentheorie und Quantummechanik*” című könyvét.

15. BERKES JENŐ: *Rellich alaptétele a végesdimenziós tér esetében.* (Október 30.)

Lásd: F. RELICH „*Störungstheorie der Spektralzerlegung, I.*” című dolgozatát [*Mathematische Annalen* **113** (1936) 600—619.].

16. BOGNÁR JÁNOS: *A Pontrjagin-féle Π_k -tér axiomatikája.* (Nov. 13.)

Ismertető előadás И. С. Иохвидов—М. Ф. Крейн „Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, I.” [Труды Московского Математического Общества **5** (1956) 367—432] dolgozata alapján.

17. SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA: *A reguláris perturbációkra vonatkozó alaptétel az általános esetben* (November 27., december 13.)

Lásd: SZŐKEFALVI-NAGY BÉLA „*Perturbations des transformations auto-adjointes dans l'espace de Hilbert*” [*Commentarii Mathematici Helvetici* **19** (1946—47) 347—366.].

¹⁰⁾ Szegedi Tudományegyetem, Elméleti Fizikai Intézet.

A matematikai logika és matematikai gépek elmélete csoport szemináriuma

1. KALMÁR LÁSZLÓ: Szubrutinok szerkesztésének módszereiről. (Március 19.)
2. KALMÁR LÁSZLÓ: Az EDSAC gép R2 szubrutinjának ismertetése (hosszú pozitív egész számok leolvasására). (Március 26.)
3. BAKOS TIBOR⁸⁾: Az EDSAC gép R9 szubrutinjának ismertetése (zárt szubrutin hosszú pozitív egész számok leolvasására). (Április 2.)
4. BEREZCKI ILONA⁸⁾: Az EDSAC gép R7 szubrutinjának ismertetése (előjeles hosszú tizedestörtek leolvasására a program végrehajtása során). (Április 9.)
5. BEREZCKI ILONA⁸⁾: Az EDSAC gép R1 szubrutinjának ismertetése (előjeles hosszú tizedestörtek leolvasására a bemenő szalagról). (Április 16.)
6. SZÉKELY-DOBY SÁNDOR⁸⁾: Jelfogós számológép tervezésénél fellépő problémák. (Április 27. A Bolyai János Matematikai Társulat szegedi csoportjával közösen rendezett előadás.)
7. ÁDÁM ANDRÁS: Kétpólusú hálózatok szerkezete. (Április 30. és május 7.)
Lásd az előadó „Kétpólusú elektromos hálózatokról, I.” című dolgozatát a *Közlemények* jelen kötetének 211–218. oldalain.
8. MUSZKA DÁNIEL: A logikai gép építése során a csoport munkájában résztvevőkre váró feladatok. (Május 14.)
9. POLLÁK GYÖRGY⁸⁾: Referáló előadás. (Május 21. és június 4.)
Az előadó B. A. Трахтенброт „Систем тесповторных схем” című dolgozatát ismertette [Доклады Академии Наук СССР **103** (1955) 973–976].
10. STEINFELD OTTÓ: Vezetési állapot-hálók tulajdonságairól. (Május 28.)
11. POLLÁK GYÖRGY⁸⁾: A vezetési állapot-háló diagramjának szögpontjai és élei számáról. (Június 18.)
Az előadó az n pontból álló pontrendszer vezetési állapotainak p_n számára vonatkozó ismert eredmények ismertetése után, azok felhasználásával bebizonyítja, hogy a megfelelő vezetési állapot-hálónak

$$e_n = \frac{p_{n+2} - 3p_{n+1} + p_n}{2}$$

számú éle van.

Ökonometriai szeminárium

1. KÁDAS KÁLMÁN¹¹⁾: Bevezetés az ökonometriába. (Október 18.)
Összefoglaló előadás.
2. JÁNOSSY FERENC¹²⁾: A „stagnáló” bővített újrateermelés matematikai modellje. (November 4.)

¹¹⁾ Budapesti Műszaki Egyetem.

¹²⁾ Országos Tervhivatal.

Az előadás a bővített újratermelés egy speciális, az előadó által stagnáló-nak elnevezett esetét tárgyalja.

Változatlanak van feltételezve a termelés technikai színvonala (konstans termelékenység), a munkamegosztás és a termelés arányai, az akkumulációs hányad és az életszínvonal, a tartalékok relatív nagysága, végül az egy lakosra eső napi munkaórák száma.

E feltételek mellett — egy zárt gazdasági egységet feltételezve — az újratermelés bővítése csak a lakosság növekedésével lehet arányos. Ezen felül csak az esetben lehet szigorúan véve stagnáló, ha a bővítés exponenciális függvény szerint megy végbe, azaz ha

$$A_t = A_0 \cdot p^t,$$

ahol A_0 az össztermelés mennyisége (vagy annak bármilyen meghatározott része, vagy a termelés mennyiségével arányosan változó tényező) a kiinduló időpontban, A_t ugyanaz a t időpontban, p az időegység alatti bővítés.

Feltételezve továbbá, hogy minden állóalap amortizációs ideje azonos minden munkafolyamatnál, továbbá, hogy az állóalapokról átvitt holt munka és az élő munka aránya (k) mindenhol azonos és változatlan (a munkatárgyat végtelen sorral élő munkára és az állóalapokról átvitt holt munkára bontva) kiszámítható, hogy az összmunkának milyen részét (a) kell akkumulációra fordítani. Ezen összefüggés:

$$a = k \left[\frac{p^T \log p^T}{p^T - 1} - 1 \right].$$

3. KREKÓ BÉLA ¹³⁾: *A lineáris programozás néhány problémájáról.* (November 18.)

A lineáris programozásban egy olyan

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

lineáris függvény maximumának, illetve minimumának a meghatározásáról van szó, amelynek értelmezési tartományát olyan nem-negatív x_i értékek alkotják, amelyek eleget tesznek egy — a termelési és értékesítési feltételeket tükröző — lineáris egyenlőtlenségrendszernek. Az értelmezési tartományról megmutatható, hogy egy olyan konvex halmazt alkot, amelynek véges számú extrémális pontja van. Az előadó ismertette a G. B. DANTZIG-től származó szimplex-módszert. [G. B. DANTZIG: „Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities”. *Activity analysis of production and allocation*. Wiley, New York, 1951. pp. 339—347.]

4. SZAKOLCZAI GYÖRGY: *A közgazdasági összefüggések matematikai megfogalmazásának alapvető problémái.* (December 2.)

Ismertető előadás.

¹³⁾ Marx Károly Közgazdaságtudományi Egyetem, Matematikai Tanszék.

**AZ INTÉZET MUNKATÁRSAINAK
AZ INTÉZET MUNKÁJÁNAK EREDMÉNYEIT
TARTALMAZÓ, 1957. JANUÁR 1. ÓTA MÁSUTT MEGJELENT
VAGY SAJTÓ ALATT LEVŐ DOLGOZATAINAK JEGYZÉKE**

Matrixelmélet és alkalmazásai

- [1] EGERVÁRY J.: „Über einige Anwendungen von Hypermatrizen, deren Blöcke vertauschbar sind“. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **37** (1957)
- [2] EGERVÁRY J.: „On rank-diminishing operations and their applications to the solution of linear equations“. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* (sajtó alatt).
- [3] EGERVÁRY J.: „Über eine Verallgemeinerung E. Purcells Vektormethode zur Lösung linearer Gleichungssystemen“. *Ingenieur Archiv* (sajtó alatt).
- [4] LOVASS-NAGY V.: *Über einige Anwendungen der Hypermatrizen in der Elektrotechnik*. Physikalische Verhandlung (1957), Mosbach, Baden.
- [5] LOVASS-NAGY V. (SZENDY K.-lyal együtt): „Mathematische Untersuchung der stationären und transienten Vorgänge in elektrischen Mehrphasenmaschinen, mit Hilfe von Hypermatrizen“. *Periodica Polytechnica* (sajtó alatt).
- [6] LOVASS-NAGY V. (BAJCSAY P.-lal együtt): „A new method of applying hypermatrices in the theory of multiphase electrical systems“. *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* **21** (1958) (sajtó alatt).
- [7] LOVASS-NAGY V. (SZENDY K.-lyal együtt): „Surge phenomena in electromagnetic coil analysed by hypermatrix method“. *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* **21** (1958) (sajtó alatt).
- [8] LOVASS-NAGY V. (BAJCSAY P.-lal együtt): „Ein Iterationsverfahren zur Lösung von Matrizedifferentialgleichungen“. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (sajtó alatt).
- [9] RÓZSA P.: „Megjegyzések egy sztochasztikus matrix spektrálfelbontásához“. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **7** (1957) 199—206.

Valószínűségszámítás és matematikai statisztika

- [10] ÉLTETŐ Ö.—SARKADI K.: „Statistical aspects of the commercial acceptance of tomato products based on the Howard count (Appendix to the paper of K. Vas »On the interpretation of mold count results«)“ (sajtó alatt).
- [11] FISCHER J. (dr. INKE G.-ral együtt): „Nomogramme zur Berechnung des Kernvolumens“. *Acta Morphologica Academiae Scientiarum Hungaricae* **7** (1957) 141—165.
- [12] HEPPES A.: „On the determination of probability distributions of more dimensions by their projections“. *Acta Mathematica Scientiarum Hungaricae* **8** (1957) 403—410.
- [13] JUVANCSZ I.: *Statistische Verfahren*. Részlet a BÁLINT: *Klinische Laboratoriumdiagnostik* (Volk und Gesundheit, Berlin, 1958.) című könyvben.

- [14] MEDGYESSY P.: „Partial integro-differential equations for stable density functions and their applications“. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* 5 (1958) 288—293.
- [15] PALÁSTI I. (TAKÁCS L.-sal együtt): „A villamos energia gazdálkodás menetrendjének készítésénél használható elméleti és gyakorlati számítások“. *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [16] RÉNYI A. (RÉVÉSZ P.-lal együtt): „On mixing sets in the theory of Markov chains“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [17] RÉNYI A.: „On strongly mixing sequences of events.“ *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [18] RÉNYI A.: „Quelques remarques sur les probabilités d'événements dépendantes.“ *Journal de Mathématiques* (sajtó alatt).
- [19] RÉNYI A. (BALATONI J.-sal együtt): „Über den Begriff der Entropie“. Az „*Arbeiten zur Informationstheorie I.*“ című cikkgyűjteményben (Mathematische Forschungsberichte, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957) 117—134.
- [20] SARKADI K.: „Vizsgálatok a Bayes-tétel problémaköréből.“ *Kandidátusi disszertáció*, Budapest, 1957.
- SARKADI K.-t lásd még: [10].
- [21] SCHNELL L.-NÉ: „Hozzászólás Horváth Alajos és Sváb János dolgozatához“. *Növénytermelés* 5 (1956) 367—372.
- [22] TAKÁCS L.: „Tartózkodási idő problémákról“. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 7 (1957) 371—395.
- [23] TAKÁCS L.: „On the generalization of Erlang's formula“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 7 (1957) 419—433.
- [24] TAKÁCS L.: „On the probability distribution of the measure of the union of random sets placed in a Euclidean space“. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* (sajtó alatt).
- [25] TAKÁCS L.: „On a probability problem in the theory of counters“. *Annals of Mathematical Statistics* 29 (1958) (sajtó alatt).
- [26] TAKÁCS L.: „On a combined waiting time and loss problem concerning telephone traffic“. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* (sajtó alatt).
- [27] TAKÁCS L.: „On a queueing problem concerning telephone traffic“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 8 (1957) 325—335.
- [28] TAKÁCS L.: „On a probability problem concerning telephone traffic“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 8 (1957) 319—324.
- [29] TAKÁCS L.: „On limiting distribution concerning a sojourn time problem“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 8 (1957) 279—294.
- [30] TAKÁCS L.: „On a sojourn time problem“. *Теория Вероятностей и её Применения* 3 (1958) 61—69.
- [31] TAKÁCS L.: „A telefonforgalom elméletének néhány valószínűségszámítási kérdéséről“. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 8 (1958) 151—210.
- [32] TAKÁCS L.: „On a coincidence problem concerning telephone traffic“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 9 (1958) (sajtó alatt).
- [33] VINCZE I. (szerkesztő): *Statisztikai minőségellenőrzés (Az ipari minőségellenőrzés matematikai statisztikai módszerei)*. Jogi és Közgazdasági Kiadó, Budapest, 1958.

Komplex függvénytan

- [34] RÉNYI A. (ERDŐS P.-lal együtt): „On the number of zeros of successive derivatives of entire functions of finite order“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 8 (1957) 223—225.
- [35] RÉNYI A.: „Some remarks on univalent functions, I.“. *A Bolgár Akadémia Közleményei* (sajtó alatt).
- [36] RÉNYI A.: „Some remarks on univalent functions, II.“. *A Nemzetközi Komplex Függvény-tani Kollokvium Közleményei* (sajtó alatt).

- [37] TURÁN P.: „Zur Theorie der Dirichletschen Reihen“. Az 1957 márciusban Berlinben tartott *Euler-Tagung* előadáskötetében (sajtó alatt).
- [38] TURÁN P.: „Über Potenzsummen komplexer Zahlen“. *Archiv der Mathematik* 9 (1958) 59–64.
- [39] TURÁN P.: „On an inequality“. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* (sajtó alatt).
- [40] TURÁN P.: „A remark concerning the behaviour of a power-series on the periphery of its convergence-circle“. *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences (Belgrade)* (sajtó alatt).
- [41] TURÁN P.: „Über eine Anwendung einer neuen Methode auf die Theorie der Riemannschen Zetafunktion“. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt Universität zu Berlin* 5 (1955–56) 281–285.
- [42] VINCZE I.: „Bemerkungen zur Theorie der Maximum-Modul von ganzen transzendenten Funktionen“. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* (sajtó alatt).

Valós függvénytan, sorelmélet és konstruktív függvénytan

- [43] ALEXITS Gy.: „Sur la convergence et la sommabilité des séries orthogonales lacunaires“. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 13 (1957) 179–188.
- [44] ALEXITS Gy. (KRÁLIK D.-vel együtt): „Über die Bedeutung der Strukturellen Eigenschaften einer Funktionen für die Konvergenz ihrer Orthogonalentwicklungen“. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 13 (1957) 131–139.
- [45] ALEXITS Gy.: „Sur la convergence absolue de certains développements orthogonaux“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 3 (1957) 303–310.
- [46] BALÁZS J.—TURÁN P.: „Notes on interpolation, IV. (Inequalities)“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [47] BÉKÉSSY A.: „Bemerkungen zur Engelschen Darstellung reeller Zahlen“. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* (sajtó alatt).
- [48] CSÁSZÁR Á.: „Sur les polynomes orthogonaux classiques“. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* (sajtó alatt).
- [49] CSÁSZÁR Á.: „Sur une classe de structure topologique générale“. *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées* (sajtó alatt).
- [50] CSÁSZÁR Á.: (S. MRÓWKA-val együtt): „Sur la compactification des espaces de proximité“. *Fundamenta Mathematica* (sajtó alatt).
- [51] CZIPSZER J.—FREUD G.: „Sur l'approximation d'une fonction périodique et de ses dérivées successives par un polynome trigonométrique et par ses dérivées successives“. *Acta Mathematica* 99 (1958) (sajtó alatt).
- [52] EGERVÁRY J.—TURÁN P.: „Notes on interpolation, V. (Stable interpolation)“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 3 (1957) (sajtó alatt).
- [53] FREUD G. (T. GANELIUS-sal együtt): „Some remarks about the one-sided L_1 -approximation with trigonometric polynomials“. *Mathematica Scandinavica* (sajtó alatt).
- [54] FREUD G.: „Über die Asymptotik orthogonaler Polynome“. *Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences (Belgrade)* (sajtó alatt).
- [55] FREUD G.: „Eine Bemerkung zur asymptotischen Darstellung von Orthogonalpolynomen“. *Mathematica Scandinavica* (sajtó alatt).
- FREUD G.-t lásd még: [51].
- [56] RÉNYI A.: „Valós számok előállítására szolgáló algoritmusokról“. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 7 (1957) 265–293.
- [57] RÉNYI A.—SZÜSZ P. (ERDŐS P.-jal együtt): „On Engel's and Sylvester's series“. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* (sajtó alatt).
- [58] RÉNYI A.: „Probabilistic methods in number theory“. *A Kínai Akadémia kiadásában* (sajtó alatt).

- [59] RÉNYI A.: „Representations for real numbers and their ergodic properties“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **8** (1957) 477–493.
- [60] RÉNYI A.: „On Cantors's products“. *Colloquium Mathematicum* (sajtó alatt).
- [61] SZÜSZ P.: „Egy sorelméleti problémáról“. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **6** (1956) 461–465.
- SZÜSZ P.-t lásd még: [57].
- TURÁN P.-t lásd: [46], [52].

Funkcionálanalízis

- [62] GEHÉR L.: „Extension of continuous transformations.“. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* (sajtó alatt).
- [63] SZŐKEFALVI-NAGY B.: „Sur les contractions de l'espace de Hilbert, II.“ *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **18** (1957) 1–14.
- [64] SZŐKEFALVI-NAGY B.: „A Hilbert-tér normális transzformációinak gyengén konvergens sorozatairól“. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* **7** (1957) 295–303.
- [65] SZŐKEFALVI-NAGY B.: „Suites faiblement convergentes de transformations normales de l'espace hilbertien“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **18** (1957) 295–302.
- [66] SZŐKEFALVI-NAGY B.: „Note on sums of almost orthogonal operators“. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **18** (1957) 189–191.
- [67] SZŐKEFALVI-NAGY B. (C. FOIAS-sal együtt): „Sur les contractions de l'espace de Hilbert, III.“. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* (sajtó alatt).
- [68] SZŐKEFALVI-NAGY B.: „Fortsetzungen linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes mit Austritt aus dem Raum“. *Wissenschaften zu Berlin, Heft. 1. (Riemann-Tagung)*. Akademie-Verlag, Berlin, 1957.
- [69] SZŐKEFALVI-NAGY B.: „Neumann János munkássága az operátorelmélet területén“. *Matematikai Lapok* **3** (1957) 185–210.

Differenciál- és integrálegyenletek, függvényegyenletek

- [70] ADLER GY.: „Recherches sur le principe du maximum de l'équation de la chaleur“. *Revue de Mathématiques Pures et Appliquées* **3** (1956) 195–201.
- [71] EGERVÁRY J. (ACZÉL J.-sal együtt): „Sur l'équation fonctionnelle de Kolmogorov“. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* **5** (1957) 60–72.
- [72] FENYŐ I.: „Über den Zusammenhang zwischen den Distributionen und den Mikusińskischen Operatoren“. *Mathematische Nachrichten* (sajtó alatt).
- [73] FENYŐ I.: „A disztribúcióelmélet és a Mikusiński-féle operátorelmélet összefüggéseiről“. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* (sajtó alatt).
- [74] FENYŐ I.: „Megjegyzés Jánossy Lajos egy dolgozatához“. *Matematikai Lapok* (sajtó alatt).
- [75] FENYŐ I.: „Über eine Verallgemeinerung der Operatorenrechnung“. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* (sajtó alatt).
- [76] FREUD G. (KRÁLIK D.-vel együtt): „Über die Anwendbarkeit des Dirichletschen Prinzips für den Kreis“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [77] FREUD G.: *Parciális differenciálegyenletek*. („Műszaki Matematikai Gyakorlatok“-sorozat) Tankönyvkiadó, Budapest (sajtó alatt).

Algebra, aritmetika és számelmélet

- [78] ÁDÁM A.: „A theorem on algebraic operators in the most general sense“. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* **18** (1957) 205–206.
- [79] SERES I.: „Über Irreduzibilität von Polynomen gewisser Typ“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).

- [80] STEINFELD O.: „Über die Quasiideale von Halbgruppen mit eigentlichem Suschkewitsch-Kern“. *Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)* 18 (1957) 235–242.
- [81] SZÜSZ P.—TURÁN P.: „Remark on the theory of diophantine approximation“. *Colloquium Mathematicum* (sajtó alatt).
- [82] SZÜSZ P.: „Remark on a theorem of Alexiewicz“. *Studia Mathematica* (sajtó alatt).
- [83] SZÜSZ P.: „Zur metrischen Theorie der inhomogenen diophantischen Approximation“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [84] TURÁN P.: „To the theory of algebraic equations“. *Известия на Математических Института (София)* (sajtó alatt).
- [85] TURÁN P.: „Über eine neue Methode der Analysis“. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Humboldt Universität zu Berlin* 5 (1955–56) 275–280.
- TURÁN P.-t lásd még: [81].

Egyéb

- [86] ÁDÁM A.: „On permutations of set products“. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* 5 (1957) 147–149.
- [87] ALEXITS GY.: „Bolyai Farkas munkássága“. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* (sajtó alatt).
- [88] CSÁSZÁR Á.: „Megjegyzés Geöcze Zoárd függvényéhez“. *Matematikai Lapok* (sajtó alatt).
- [89] HEPPES A.: „Beweis einer Vermutung von A. VÁZSONYI“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 8 (1957) 463–466.
- [90] HEPPES A.: „Térbeli pontthalmazok felosztása kisebb átmérőjű halmazok összegére“. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 7 (1957) 413–416.
- [91] KALMÁR L.: „Az ún. megoldhatatlan matematikai problémákra vonatkozó kutatások alapjául szolgáló Church-féle hipotézisről“. *A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei* 7 (1957) 19–38.
- [92] KALMÁR L.: „Über arithmetische Funktionen von unendlich vielen Variablen, welche an jeder Stelle bloss von einer endlichen Anzahl von variablen abhängig sind“. *Colloquium Mathematicum* (sajtó alatt).
- [93] KALMÁR L.: „An argument against the plausibility of Church's thesis“. *Proceedings of the Colloquium on Constructivity in Mathematics (Amsterdam)* (sajtó alatt).
- [94] KALMÁR L.: „Сегедская логическая машина и некоторые ее применения“. *Автоматика и телемеханика (Москва)* (sajtó alatt).
- [95] VINCZE I.: „Eine Bemerkung zur Differentialgeometrie der Flächen“. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae, Sectio Mathematica* (sajtó alatt).

A KORÁBBI DOLGOZATJEGYZÉKEKBEN HIÁNYOS BIBLIOGRÁFIAI ADATOKKAL SZEREPLŐ DOLGOZATOK¹⁾

- [25*] RÉRYI A.: „A new deduction of Maxwell's law on velocity distribution“. *Известия на Математическия Института (София)* 2 (1957) 45–55.
- [45*] TAKÁCS L.: „Über die wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung der Anodenstromschwankungen von Elektronenröhren“. *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae* 8 (1957) 25–50.
- [46*] TAKÁCS L.: „On the general probability theorem and its applications in the theory of the stochastic processes“. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 54 (1958) 219–224.

¹⁾ A *-gal jelölt sorszáмок az I. évfolyam (1956) 1–2. füzetének 311–314. oldalain, a **-gal jelzett sorszáмок pedig a 4. füzet 645–648. oldalain található dolgozatjegyzék sorszámaira utalnak.

- [48*] TAKÁCS L.: „On a stochastic process concerning some waiting time problems“. Теория Вероятностей и её Применения 2 (1957) 92—105.
- [67*] SZILVAY G.-NÉ: „Tekercsek indukció- és önindukció-változásának számítása mágnesező próbatest jelenlétében“. A Magyar Tudományos Akadémia Központi Fizikai Kutató Intézetének Közleményei 4 (1956) 102—109.
- [2**] LOVASS-NAGY V. (SZENDY K.-lyal együtt): „Application of the matrix calculus to the investigation of transformeis in arbitrarz connection“. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae 16 (1957) 311—352.
- [3**] LOVASS-NAGY V. (BAJCSAY P.-lal együtt): „The generalization of the four-terminal theory by means of hypermatrices“. Acta Technica Academiae Scientierum Hungarical 19 (1958) 293—311.
- [6**] RÉNYI A. (ARATÓ M.-sal együtt): „Probabilistic proof of a theorem on the approximation of continuous functions by means of generalized Bernstein-polynomials“. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 8 (1957) 91—97.
- [14**] RÉNYI A. (PRÉKOPA A.-sal együtt): „On the independence in the limit of sums depending on the same sequence of independent random variables“. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 8 (1957) 319—326.
- [16**] RÉNYI A. (ERDŐS P.-lal együtt): „Probabilistic approach to some problems of diophantine analysis“. Illinois Mathematical Journal 1 (1957) 303—315.
- [17**] RÉNYI A.: „Mathematical Notes, II. On the sequence of generalized partial sums of a series“. Publicationes Mathematicae (Debrecen) 5 (1957—58) 129—141.
- [18**] RÉNYI A.: „Remark on the theorem of Simmons“. Acta Scientiarum Mathematicarum. (Szeged) 18 (1957) 21—23.
- [19**] RÉNYI A.: „On the asymptotic distribution of sums of a random number of independent random variables“. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 8 (1957) 193—201.
- [20**] SARKADI K.: „On the distribution of the number of exceedances“. Annals of Mathematical Statistics 28 (1957) 1021—1023.
- [22**] TAKÁCS L.: „Bizonyos várakozási idő problémáiról“. A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei 7 (1957) 183—197.
- [23**] TAKÁCS L.: „On some probability problems concerning the theory of counters“. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 8 (1957) 127—138.
- [24**] TAKÁCS L.: „On certain sojourn time problems in the theory of stochastic processes“. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 8 (1957) 169—191.
- [27**] TURÁN P.: „Über lakunären Potenzreihen“. Revue de Mathématiques Pures et Appliquées 1 (1956) 27—32.
- [32**] CSÁSZÁR Á.: „Sur une caracterisation de la répartition normale de probabilités“. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 7 (1956) 359—381.
- [33**] CSÁSZÁR Á.: „A topológikus tér fogalmáról, I.“. Matematikai Lapok 8 (1957) 37—60.
CSÁSZÁR Á.: „A topológikus tér fogalmáról, II.“. Matematikai Lapok 8 (1957) 211—231.
CSÁSZÁR Á.: „A topológikus tér fogalmáról, III.“. Matematikai Lapok 9 (1958) 37—63.
- [34**] CSÁSZÁR Á.: „Quelpues remarques sur une ouvrage de M. V. Pták“. Publicationes Mathematicae (Debrecen) 5 (1957—1958) 154—161.
- [40**] SZŐKEFALVI-NAGY B. (KORÁNYI Á.-mal együtt): „Relations d'un probleme de Nevanlinna et Pick avec la théorie des opérateurs de l'espace hilbertien“. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 8 (1957) 1—14.
- [41**] FENYŐ I.: „Über eine Lösungsmethode gewisser Funktionalgleichungen“. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 7 (1956) 383—396.
- [42**] FENYŐ I.: Integrálegyenletek. Tankönyvkiadó, Budapest, 1957.
- [46**] RÉNYI A.—TURÁN P.: „On a theorem of Erdős and Kac“. Acta Arithmetica 1 (1957) 71—84.
- [53**] SZÜSZ P.: „Bemerkung über die Verteilung der Ziffern in der Cantorsche Reihe reeller Zahlen“. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 8 (1957) 163—168.
- [54**] SZÜSZ P.: „Megjegyzések a számjegyek eloszlásáról valós számok Cantor-sorában“. Matematikai Lapok 8 (1957) 68—78.

- [56**] TURÁN P.: „On the Zeros of the zetafunction of Riemann“. *Journal of the Indian Mathematical Society* 20 (1957) 17—36.
- [57**] 杜瀾·保羅：數學分析中的一個新方法及其應用 (P. TURÁN: Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen) (1956) 317—565.
- [58**] TURÁN P.: „On the so-called density-hypothesis in the theory of zeta function of Riemann“. *Acta Arithmetica Academiae Scientiarum Hungaricae* (sajtó alatt).
- [64**] TURÁN P.: „Remark on the preceding paper of J. W. S. Cassels“. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* 8 (1957) 291—294.

A kiadásért felelős az Akadémiai Kiadó igazgatója

Műszaki felelős: Szöllősy Károly

A kézirat nyomdába érkezett: 1958. III. 4. Terjedelem 12 (A/5) ív

Szegedi Nyomda Vállalat 58-938

Felelős vezető: Vincze György

MAGYAR
TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
KÖNYVTÁRA

СОДЕРЖАНИЕ

ADLER, Gy.: Вариационно-исчислительной характеризируемости уравнения теплопроводности	153
ВІНАРИ, І.: Распространение осциляционных и сравнительных теорем типа Sturm-a на решение некоторых нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка	159
ТАКА́CS, L.: Несколько замечаний в связи с задачами блуждания	175
VINCZE, I.: Двумерные предельные теоремы в теории вариационных рядов	183
ÁDÁM, A.: О двухполусных электрических сетях, I.	211
ÉLTETŐ, Ö.—SARKADI, K.: О статистических проблемах, возникающих при микробиологическом контроле томатных концентратов	219
JUNG, G.—RÓZSA, P.—SÁRKÁNY, Gy.: Определение числа теоретических ступеней противоточных разделяющих процессов химической технологии	227
RÉNYI, A.: Исследование угольно-зернистого сопротивления методом теории вероятностей	247
Резюме докладов произнесенных на семинарах отделений Института	257
Список работ сотрудников Института, опубликованных в других журналах или находящихся в печати	271

INDEX

ADLER, Gy.: Sulla caratterizzabilità dell'equazione del calore dal punto di vista del calcolo delle variazioni	153
BIHARI, I.: Ausdehnung der Sturmschen Oscillations- und Vergleichssätze auf die Lösungen gewisser nicht-linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung	159
TAKÁCS, L.: Remarks on random walk problems	175
VINCZE, I.: Einige zweidimensionale Verteilungs- und Grenzverteilungssätze in der Theorie der geordneten Stichproben	183
ÁDÁM, A.: Über zweipolige elektrische Netze, I.	211
ÉLTETŐ, Ö.—SÁRKADI, K.: On the statistical problems arising in microbiological examination of tomato purées	219
JUNG, G.—RÓZSA, P.—SÁRKÁNY, Gy.: Determination of the theoretical stage-number of countercurrent distributive chemical unit operations	227
RÉNYI, A.: Investigation by means of probability theory of the conductivity of certain resistances	247
Abstracts of lectures delivered in the seminars of the Institute	257
List of papers of the members of the Institute published or in print in another periodical	271